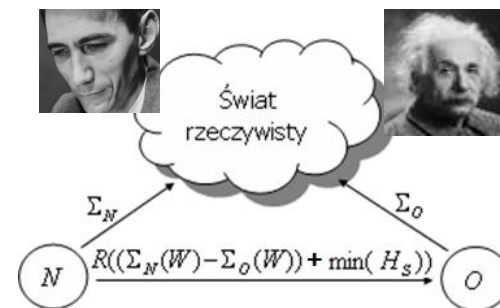


Podstawy Teorii Informacji

Obserwacje, pomiary, cyfryzacja

Artur Przelaskowski



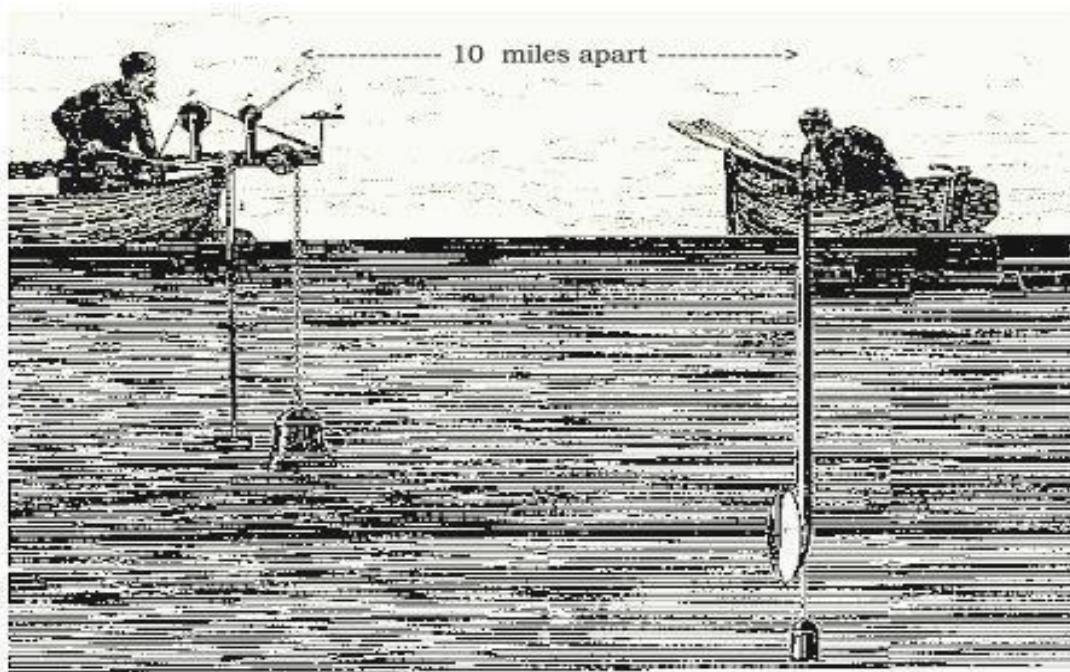
MiNI, p. 506, artur.przelaskowski@pw.edu.pl, tel.w. 7821

Materiały: www.ire.pw.edu.pl/~arturp/Dydaktyka/PTI

Obserwacje poznawcze

- Cel zasadniczy: podglądanie świata w różnej skali, położeniu, aspekcie etc. w kontekście różnorodnych aktywności ludzkich celem pozyskania (zrozumienia, poznania) oraz wykorzystania informacji
- Przykładowe aktywności wykorzystujące pozyskane informacje ...
 - rozwijanie zainteresowań, zaspokajanie konkretnych potrzeb
 - realizacja istotnych zamiarów, odkrywanie, zdobywanie
 - weryfikacja hipotez, doniesień etc.
- Obserwacje pomiarowe (urządzenia i sygnały): skuteczne pomiary sygnałów-nośników informacji (metrologia)
 - wiarygodne, powtarzalne, precyzyjne, jednoznaczne, weryfikowalne, dostosowane do specyfiki zjawiska
 - urządzenia i systemy pomiarowe, czujniki, różnego typu sensory
 - przetwarzanie wstępne sygnałów (analogowy-ciągły, zmienny w czasie nośnik informacji)
 - cyfryzacja - ustalenie modelu zjawiska, dobór parametrów przetworników A/D, kodowanie wstępne (założenia dotyczące reprezentacji cyfrowej)
- Obserwacje niesformalizowane
 - obiektywizacja ludzkich postrzeżeń (opiniowanie uporządkowane)
 - podążanie za ludzkim poznaniem (nieograniczone możliwości ludzkiego mózgu i ducha?)

POMIARY sygnałów – wyptłynmy na głębię ...



Jezioro Genewskie, **1822**, **Daniel Colladen**, szwajcarski inżynier i **Charles-Francois Sturm**, matematyk wyznaczają prędkość rozchodzenia się dźwięku w wodzie (1480-1500m/s)



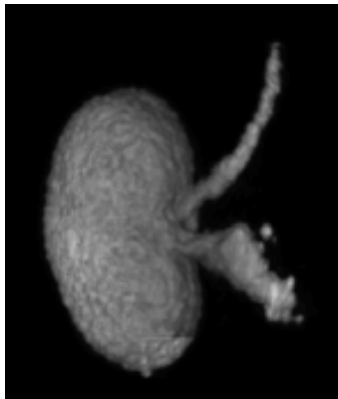
1880, efekt
piezoelektryczny

Poważniejsze przykłady obserwacji (medycyna)

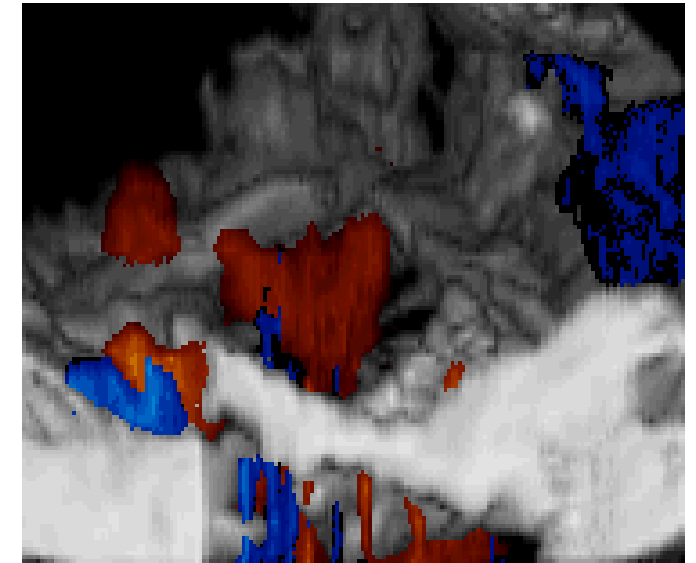
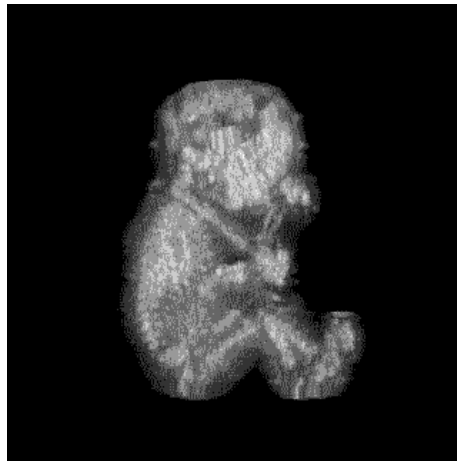
URZĄDZENIA POMIAROWE

Obrazowanie ultrasonograficzne

- 1948 początek badań nad medyczną USG
- początki zastosowań już w latach 1952-1961
- najpowszechniejsza, najtańsza, najmniejsza, najbezpieczniejsza, naj



Nerka in vitro



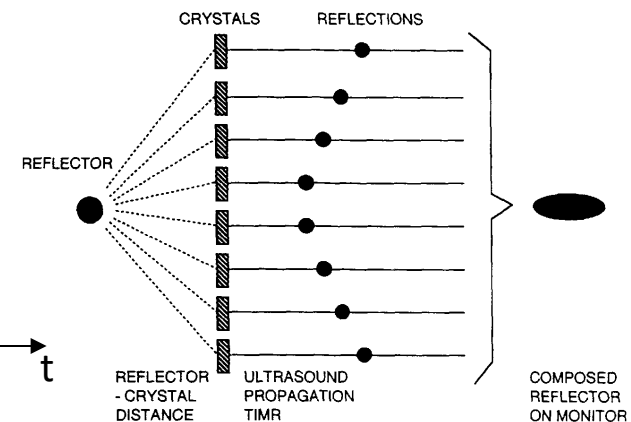
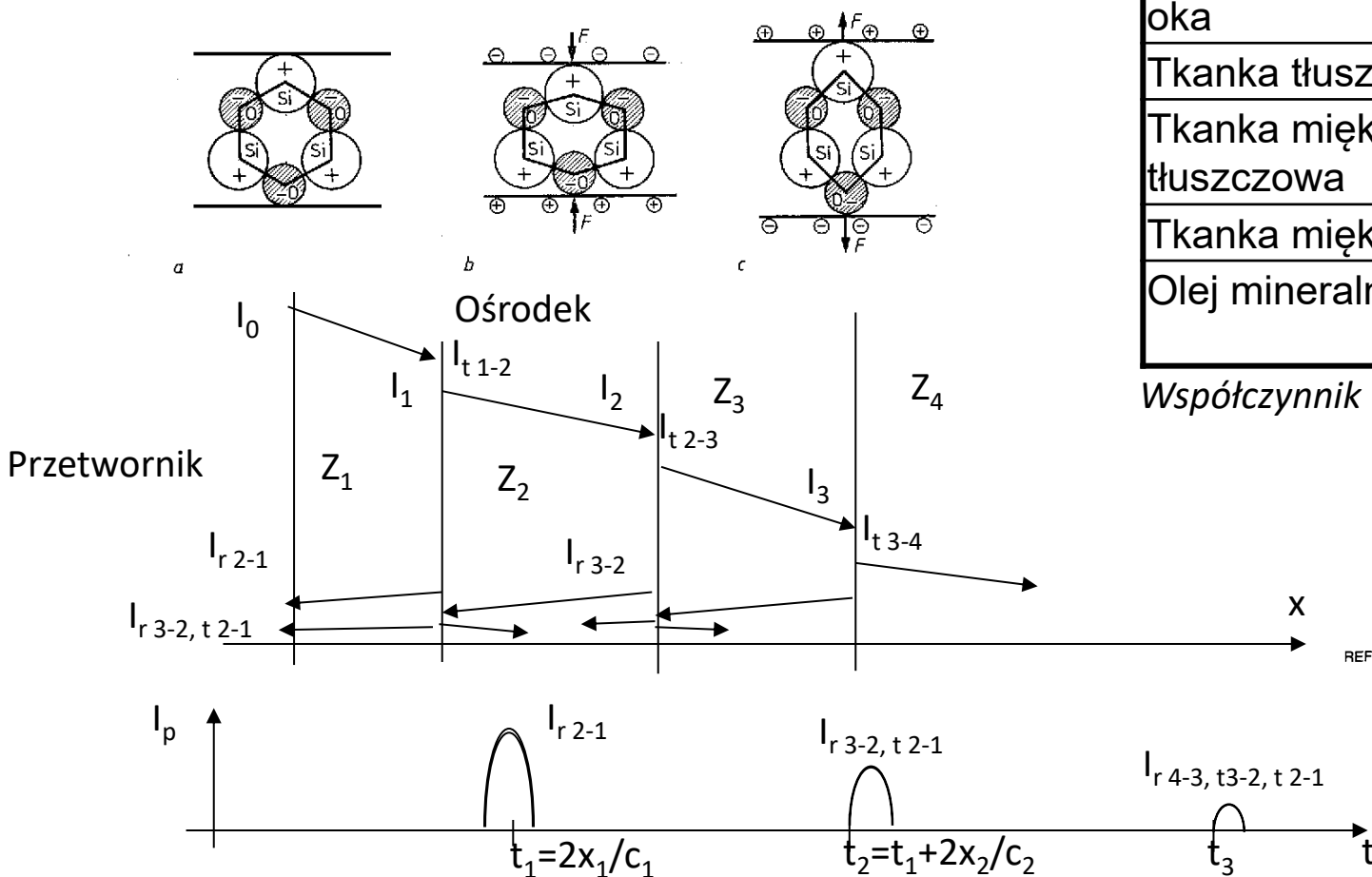
Niedomykalność zastawki mitralnej



Powstawanie obrazu odbiciowego za pomocą ultradźwięków

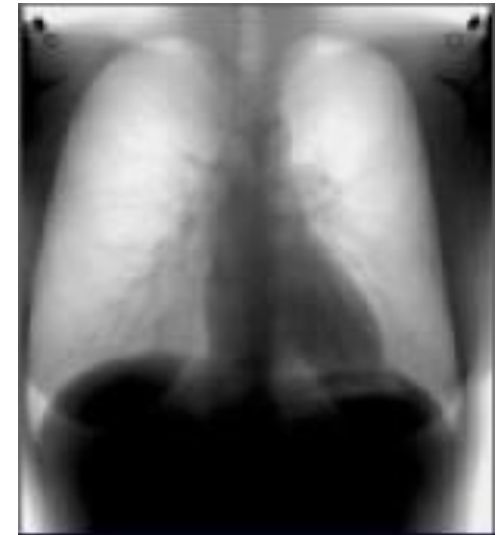
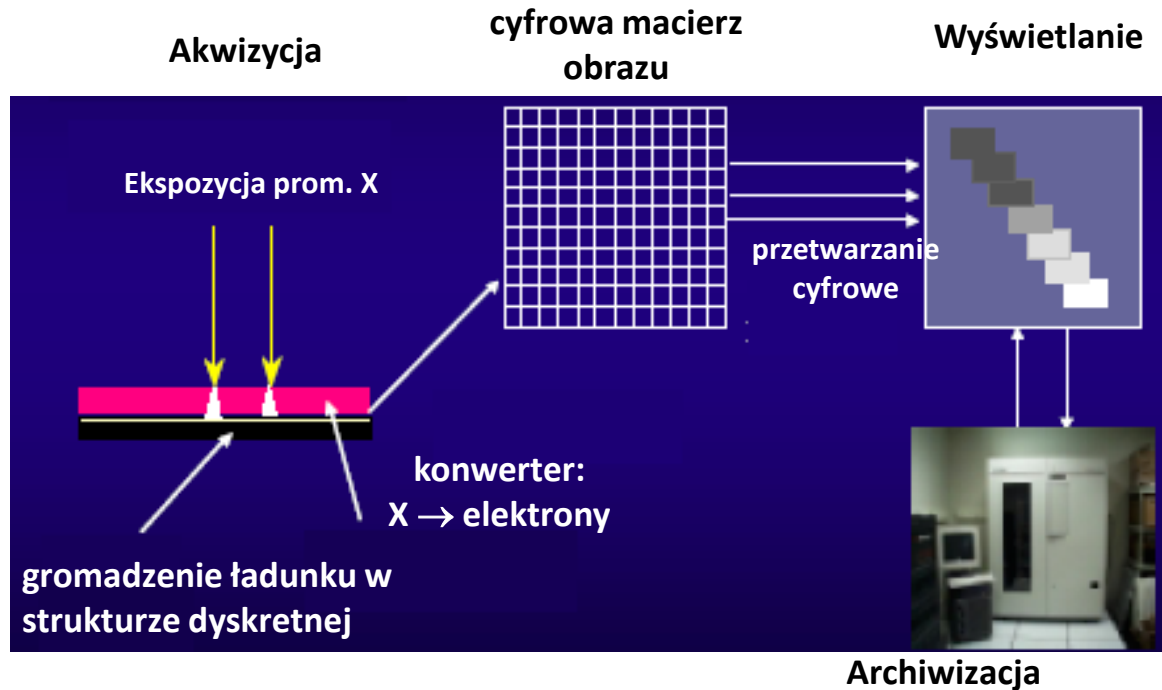
Granica ośrodków	R
Tkanka miękka – Powietrze	0,9989
Tkanka miękka – Płuca	0,52
Tkanka miękka – Kość	0,43
Ciało wodniste oka – Soczewka oka	0,011
Tkanka tłuszczowa – Wątroba	0,0079
Tkanka miękka – Tkanka tłuszczowa	0,0069
Tkanka miękka – Mięśnie	0,0004
Olej mineralny – Tkanka miękka	0,0043

Współczynnik odbicia na granicy ośrodków



Powstawanie obrazu ultradźwiękowego granic obszarów o różnej impedancji.

Radiografia cyfrowa



tkanka miękka



tkanka kostna

- szybkie badanie, mniejsze dawki
- elastyczność akwizycji i wyświetlania
- cyfrowe gromadzenie i przeglądanie
- dystrybucja wielu dokładnych kopii
- ilościowa ocena danych\konsultacje

Diagnostyczna medycyna nuklearna

- Lata 1948 -1952-1963
 - Źródło w rozwoju techniki jądrowej (bomba atomowa)
 - Substancje biologicznie czynne znakowane izotopami, badanie mechanizmów metabolizmu
 - Obrazowanie struktur silnej lub słabiej uczestniczących w metabolizmie
 - Obrazowanie funkcji poprzez śledzenie przebiegu gromadzenia i usuwania radiofarmaceutyków
 - Scyntygrafia, SPECT i PET (izotopy krótkożyciowe, wybrane funkcje aktywności)
 - Podobne metody rekonstrukcji jak w CT

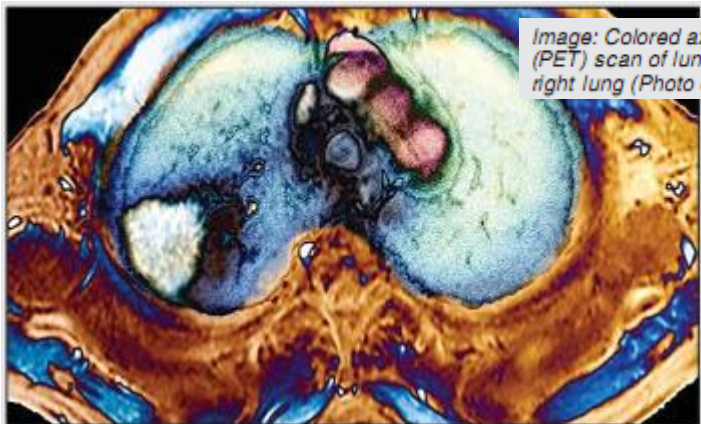
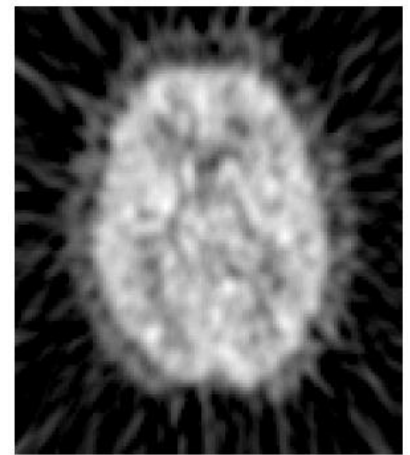


Image: Colored axial positron electron tomography (PET) scan of lung cancer (white, lower left) in the right lung (Photo courtesy of Sovereign, ISM).

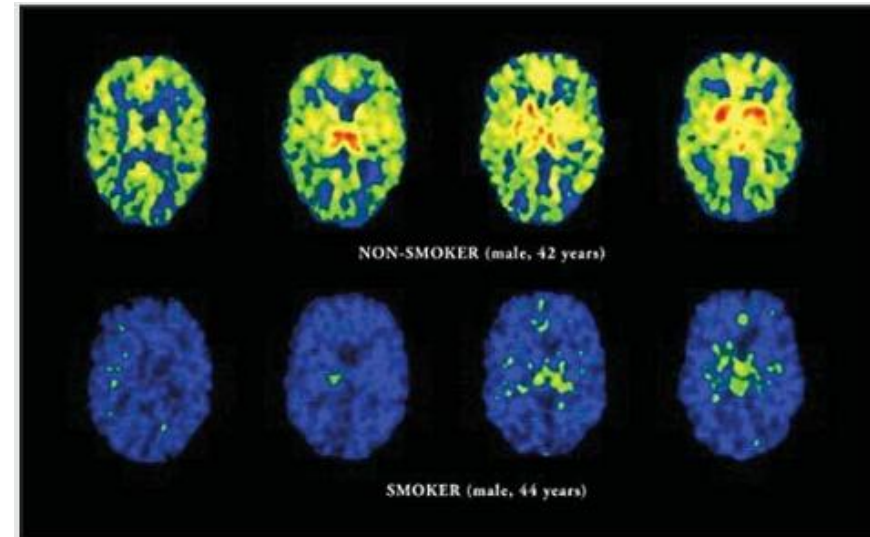
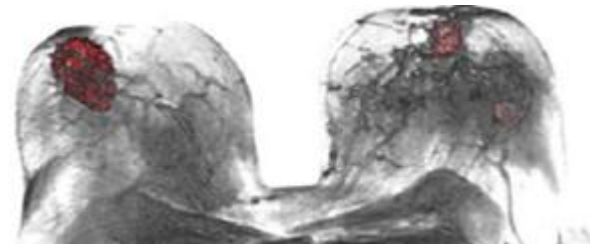
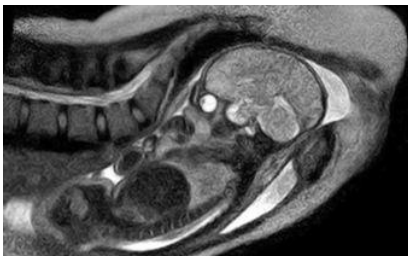
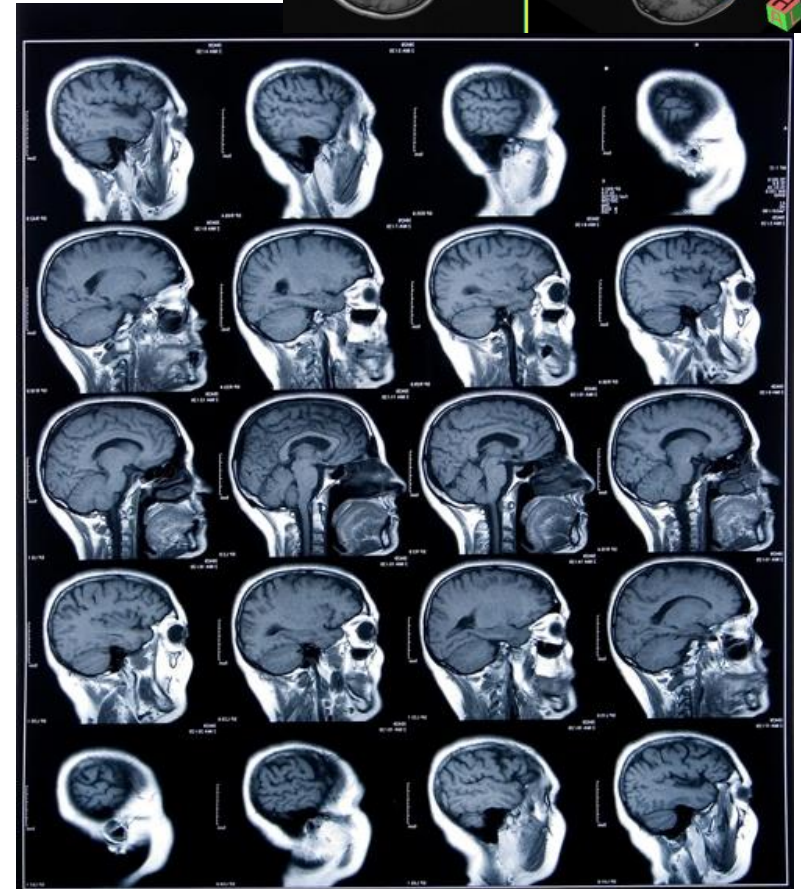
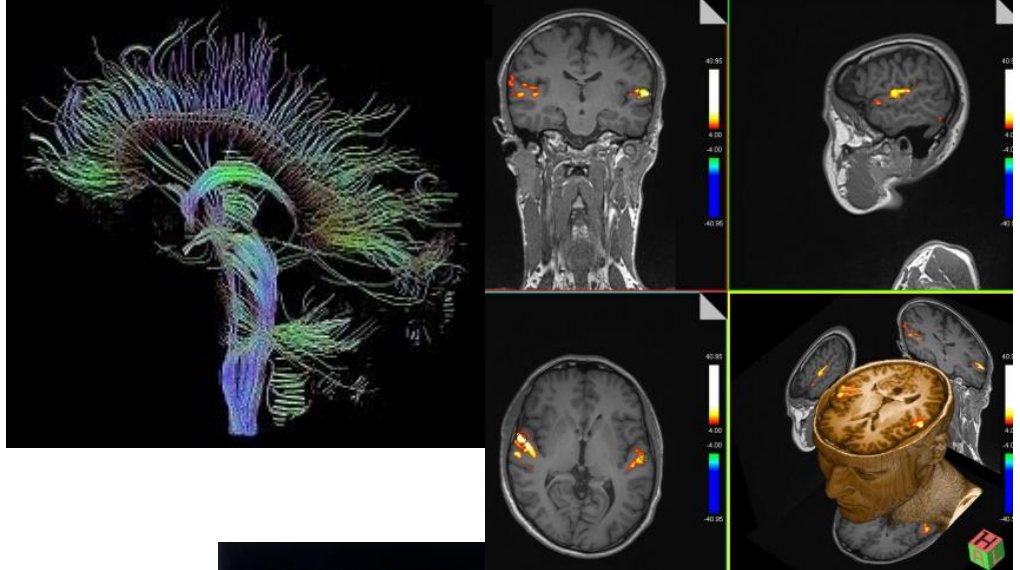


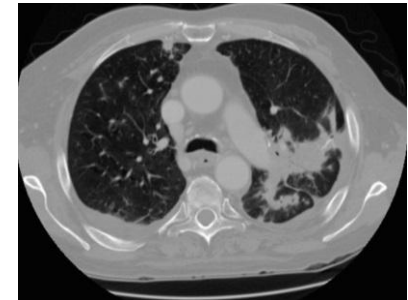
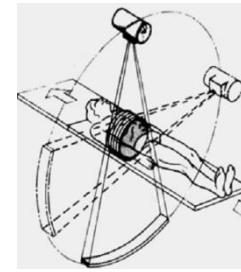
Image: Colored positron emission tomography (PET) scans of the brains of a smoker and a non-smoker (Photo courtesy of Pascal Goetgheluck).

Tomografia rezonansu magnetycznego

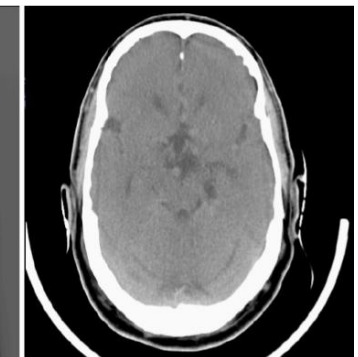
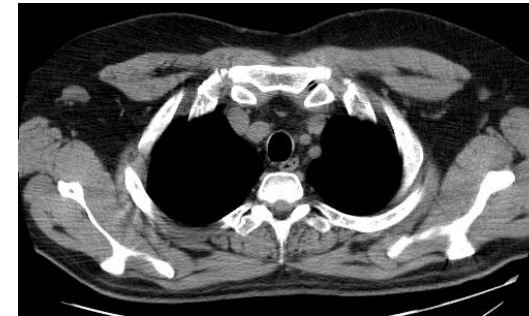
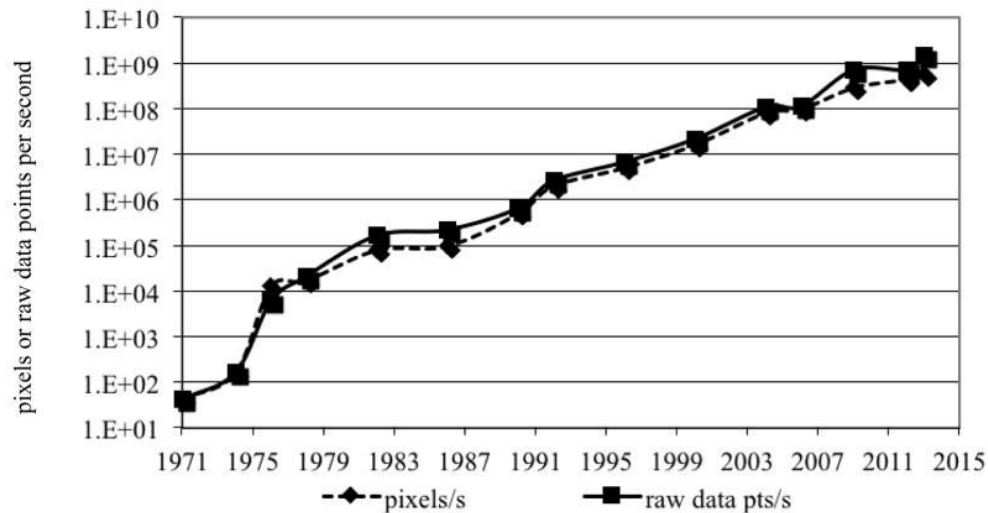
- Lata 1950-1980 – metoda przyszłości?
 - magnetyczny rezonans jądrowy (NMR) - brak jonizacji
 - Akwizycja: silne pole magnetyczne (stałe), pobudzenia elektromagnetyczne, porządkowanie jądrowych momentów magnetycznych, generacja impulsów radiowych, pomiar 1D transformacji Fourierowskich, częstotliwościowe metody rekonstrukcji (odwrotna FT)
 - Ciągły rozwój - szybkie sekwencje pobudzające, fMRI, badania dyfuzyjne, traktografia, spektroskopia ...
 - Metody rekonstrukcji nieco odmienne od CT



Tomografia komputerowa



- Technika transmisyjna z rozkładem liniowych współczynników tłumienia uśrednionych po grubości warstwy (wielowarstwowe, detektory półprzewodnikowe, dwuenergetyczne)
- Wykorzystanie komputerów! (tomografia skomputeryzowana)
- Realne 3D: obrazy przekrojów, warstwowa rekonstrukcja wolumenu
- Problem dawki vs szczególny potencjał w detekcji wczesnych stadiów raka



Speed of CT since its introduction, measured in raw data points measured per second, or in the number of pixels that the measured raw data is used to reconstruct (**Recent and Future Directions in CT Imaging**

[Norbert J. Pelc, Ann Biomed Eng. 2014 Feb; 42\(2\): 260–268.](#)

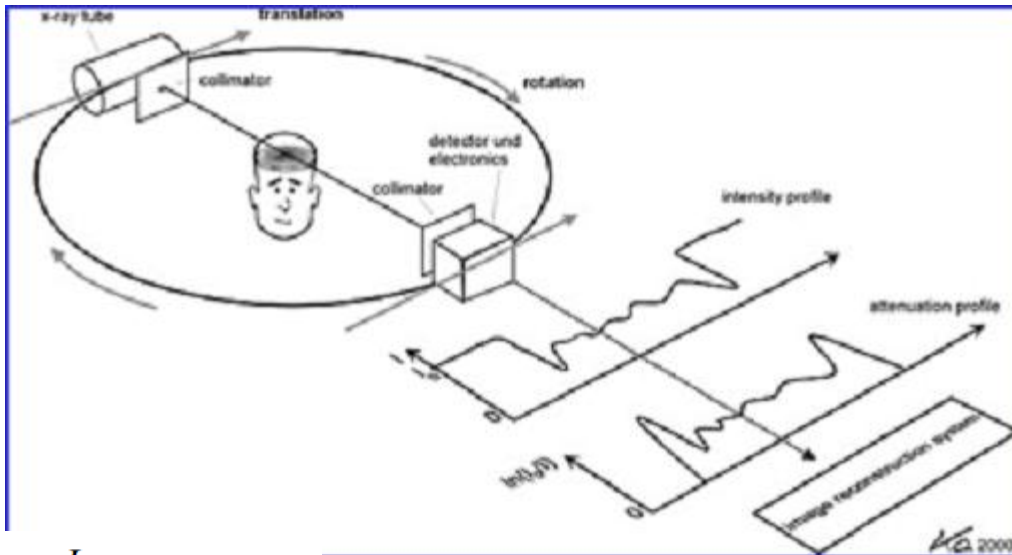
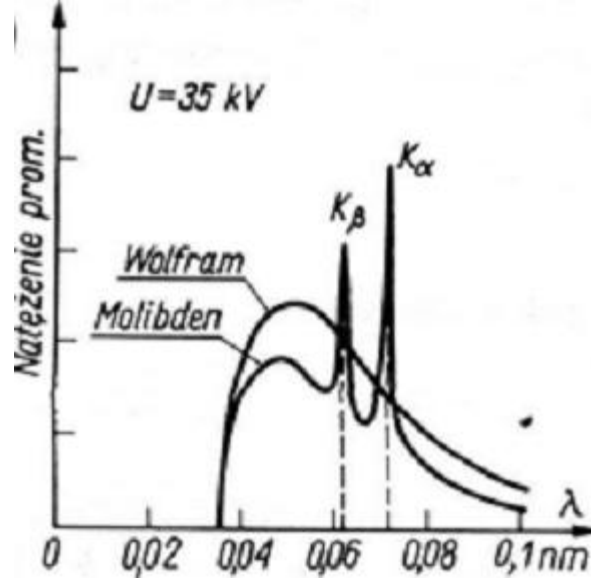
Tomografia komputerowa

“Your Majesties, Your Royal Highnesses, Ladies and Gentlemen, Neither of this year’s laureates in physiology or medicine is a medical doctor. Nevertheless, they have achieved a revolution in the field of medicine. It is sometimes said that this new X-ray method that they have developed — computerised tomography — has ushered medicine into the space age. Few medical achievements have received such immediate acceptance and met with such unreserved enthusiasm as computerised tomography. It literally swept the world”.

Laudacja podczas wręczenia Nagrody Nobla G.N. Hounsfieldowi i A.M. Cormackowi w 1979 r. (medycyna i fizjologia), za
„for the development of computer assisted tomography”

...rewolucja w medycynie - początek ery kosmicznej, niewiele jest takich osiągnięć z natychmiastową akceptacją i bezwarunkowym entuzjazmem ogarnęła świat....

Co mierzymy

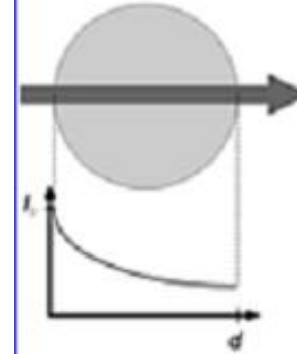


$$\ln \frac{I}{I_0} = -\int_L \mu(x) dx$$

$$\mu = \rho \left(a + \frac{bZ^{3.8}}{E^{3.2}} \right)$$

$$CTnumber = 1000 \frac{\mu - \mu_{water,73keV}}{\mu_{water,73keV}}$$

Case 1: homogeneous object, monochromatic radiation

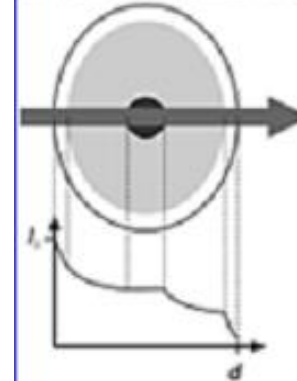


$$I = I_0 \cdot e^{-\mu \cdot d}$$

$$P = \ln \frac{I_0}{I} = \mu \cdot d$$

$$\mu = \frac{1}{d} \cdot \ln \frac{I_0}{I}$$

Case 2: inhomogeneous object, monochromatic radiation

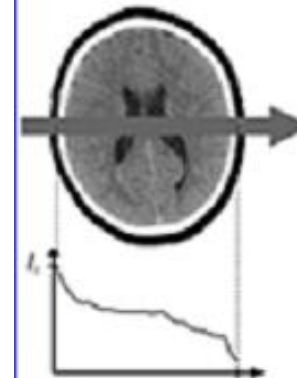


$$I = I_0 \cdot e^{-\mu_1 \cdot d_1 - \mu_2 \cdot d_2 - \mu_3 \cdot d_3 - \dots} = I_0 \cdot e^{-\left[\sum_{i=1}^n \mu_i \cdot d_i \right]} = I_0 \cdot e^{-\int_0^d \mu dx}$$

$$P = \ln \frac{I_0}{I} = \sum \mu_i \cdot d_i$$

$$\mu_i = ?$$

Case 3: inhomogeneous object, polychromatic radiation

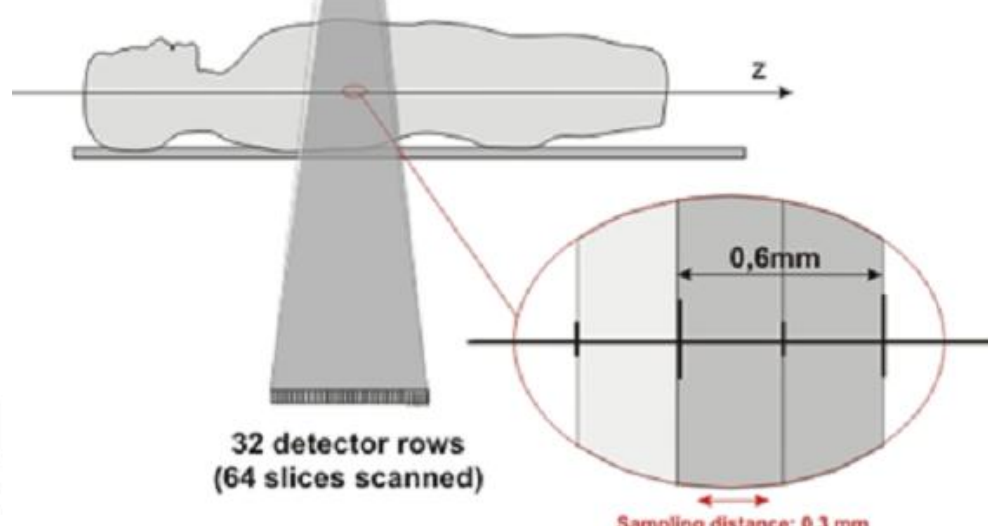
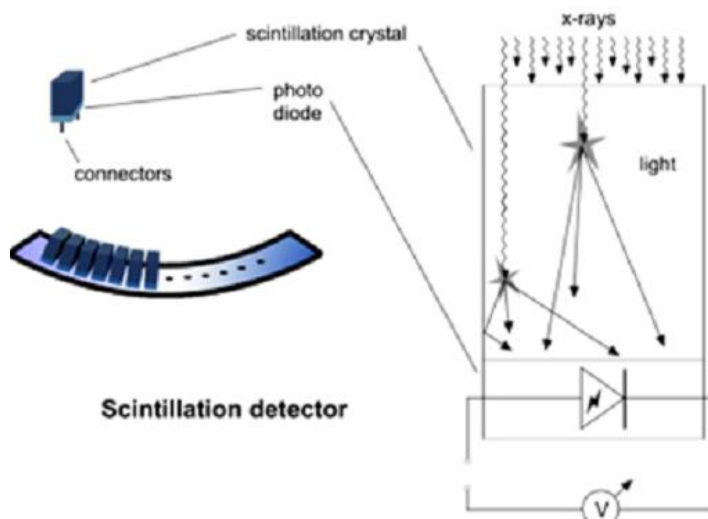
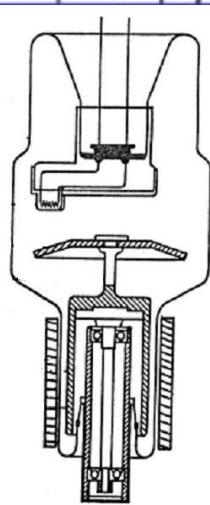
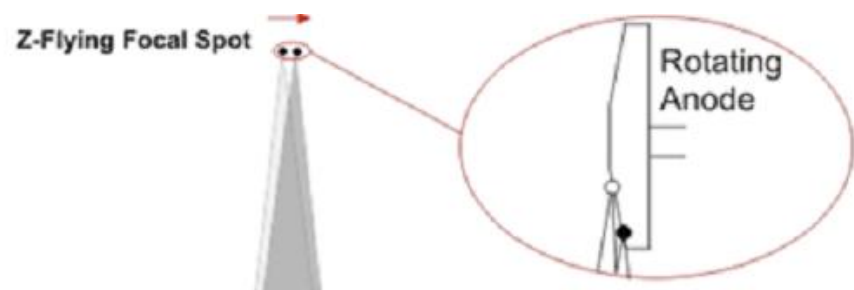
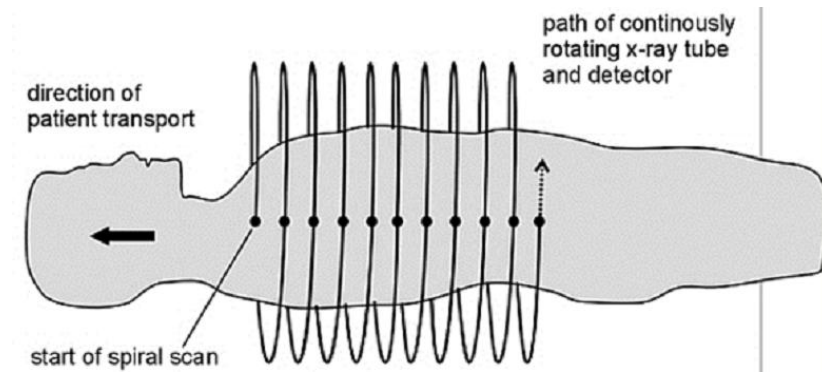
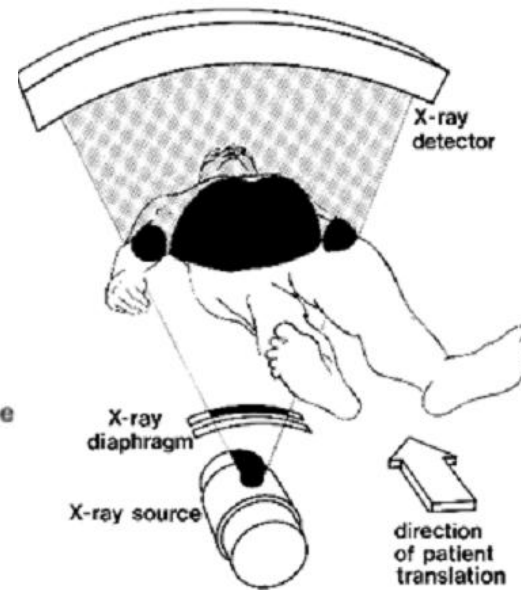
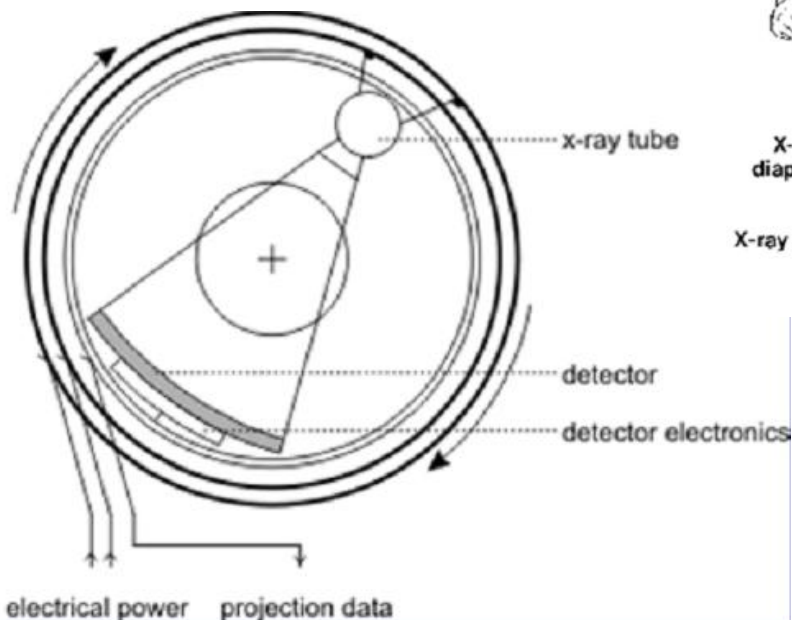


$$I = \int_0^{E_{max}} I_0(E) \cdot e^{-\int_0^d \mu(x,E) dx} dE$$

$$P = \ln \frac{I_0}{I}$$

$$\mu(x, y) = ?$$

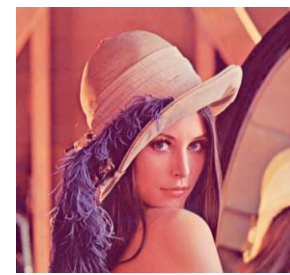
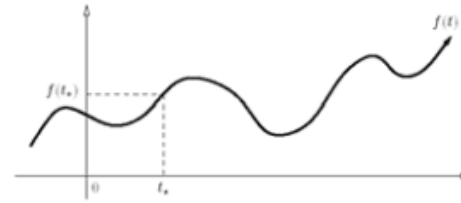
Tomograf spiralny, wielowarstwowy



Modele, reprezentacje

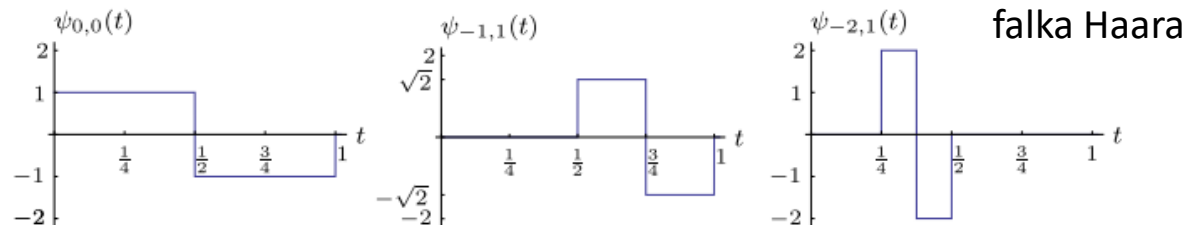
SYGNAŁY

Sygnaty realne, funkcje, modele sygnałów



- Istotna zmienność dowolnej wielkości fizycznej (charakteryzującej określony proces fizyczny) opisana za pomocą funkcji (lub sekwencji danych) jednej lub wielu zmiennych (czasu, położenia w przestrzeni)
- Istotny jest kontekst urządzeń pomiarowych oraz występujących realnie uwarunkowań
- Reprezentacja sygnałów odnosi się zwykle do fizycznej zmienności przy maksymalnej tolerancji rejestrowanej treści (graniczne parametry akwizycji)
 - uwzględnia technologiczny kontekst przekazu (dynamika zmian, zakłócenia, szумы, specyfika pomiaru) oraz uproszczoną charakterystykę treści przyjętego modelu użytkowego
- Sygnaty mogą być **interpretacją** pewnych zdarzeń (przekaz myśli, rozpoznanie, szyfr) lub skutkiem obserwacji (czujniki, pomiary, odczyt)
- **Sygnaty to nośniki informacji**, materializują obserwację, czyli abstrakcyjną, potencjalną informację o mierzonym zjawisku; odzwierciedlają obiekty biologiczne, społeczne i techniczne „informując” (systemy przekazu informacji) o nich
- W swoich cechach zawierają informację, bazują na określonej naturze (jawnie, niejasno), służą komunikacji informacji
- Nośnik energii modulowany informacją o stanie lub zachowaniu pewnego układu fizycznego, biochemicznego, abstrakcyjnego/pojęciowego
- Fizyczne/technologiczne przekazy sygnałowe kształtują/warunkują pragmatykę ludzkiego poznania

Jakie sygnały?

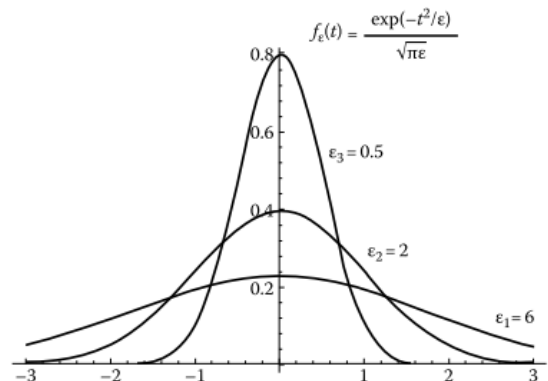
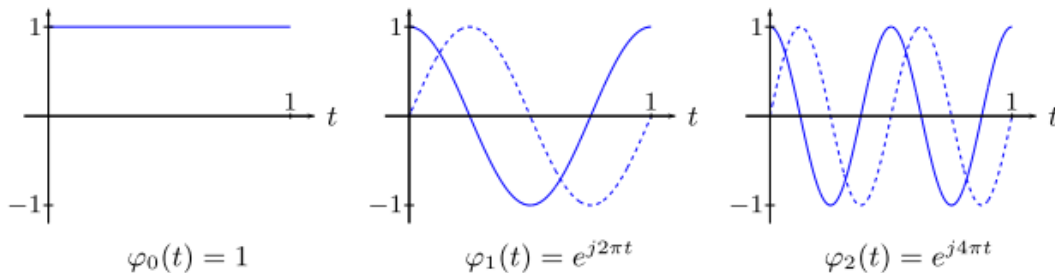
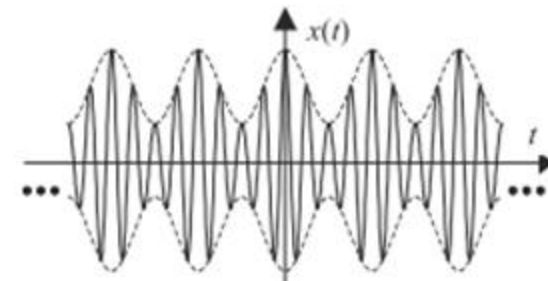


- Podział sygnałów

- deterministyczne: okresowe, prawie okresowe, zmodulowane, impulsowe o ograniczonej energii, o nieskończonym czasie trwania i ograniczonej energii/mocy
- losowe
 - niestacjonarne
 - stacjonarne: nieergodyczne i ergodyczne (o różnych rozkładach)
- ciągłe i dyskretne
- różne przestrzenie wartości (wielowymiarowe, Z, R, C)

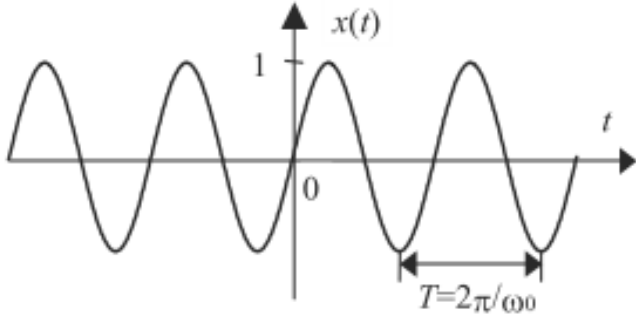
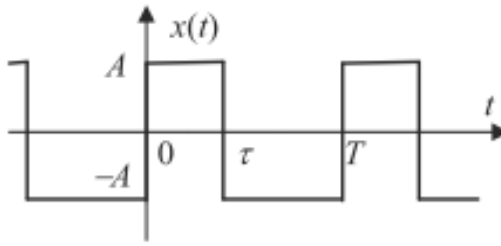
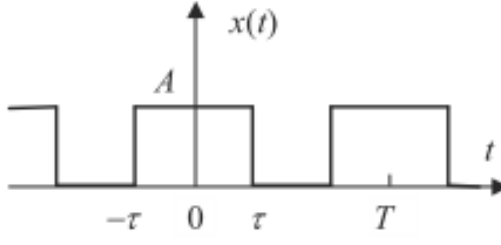
$$E_x = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 dt$$

$$P_x = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} |x(t)|^2 dt$$



MATEMATYCZNE modele sygnałów - funkcji

- okresowe

<p>Sygnal sinusoidalny ($\omega_0 = 2\pi f_0, f_0 = 1/T$)</p> $x(t) = A \sin(\omega_0 t)$	
<p>Fala prostokątna bipolarna</p> $x(t) = \begin{cases} A & \text{dla } t \in (kT, kT + \tau) \\ -A & \text{dla } t \in (kT + \tau, kT + T) \\ 0 & \text{dla } t = k \cdot T, kT + \tau \end{cases}$	
<p>Fala prostokątna unipolarna</p> $x(t) = \begin{cases} A & \text{dla } t \in (kT - \tau/2, kT + \tau/2) \\ A/2 & \text{dla } t = kT \pm \tau/2 \\ 0 & \text{dla } t \text{ pozostałych} \end{cases}$	

Sygnaly użytkowe

- modulacja

- Modulacja amplitudy

$$x(t) = A[1 + k_a \cdot m(t)] \cdot \cos(\omega_0 t), \quad 0 < k_a \leq 1$$

- Modulacja kąta (ogólnie)

$$x(t) = A \cos[\varphi(t)]$$

- modulacja fazy

$$x(t) = A \cos[\omega_0 t + \phi_0 + k_\phi \cdot m(t)]$$

- modulacja częstotliwości

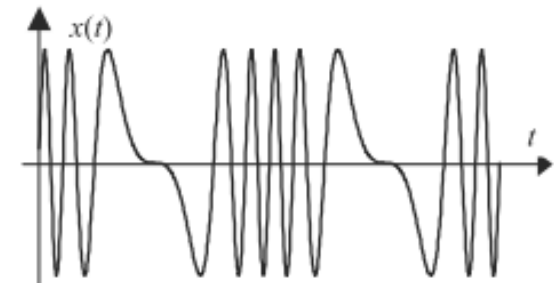
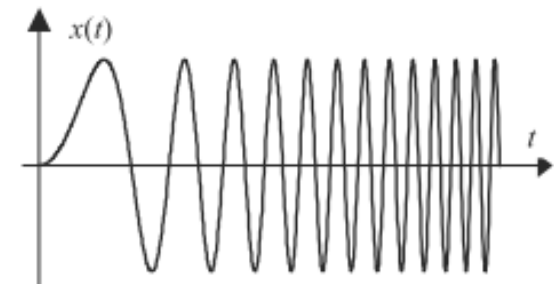
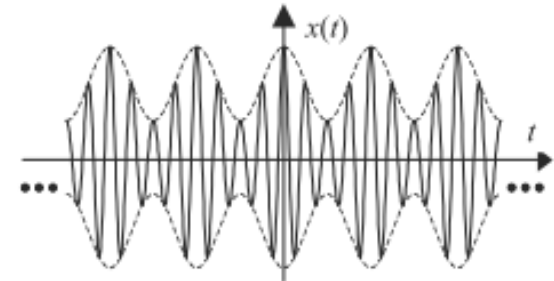
$$x(t) = A \cos[\omega_0 t + \phi_0 + k_f \cdot \int m(t) dt]$$

-
- liniowa modulacja fazy / częstotliwości

$$m(t) = \alpha t; \quad \int m(t) dt = \frac{1}{2} \alpha t^2$$

- sinusoidalna modulacja fazy / częstotliwości

$$m(t) = \cos(\omega_m t); \quad \int m(t) dt = \frac{1}{\omega_m} \sin(\omega_m t)$$

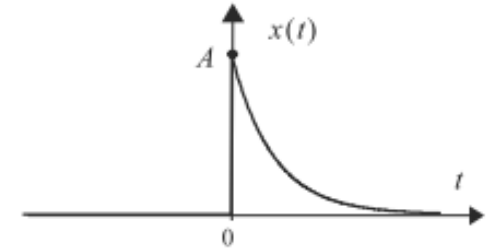


Przykładowe funkcje-sygnały cd

- o nieskończonym czasie trwania i ograniczonej energii

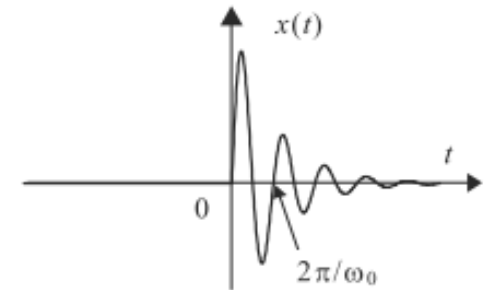
Wykładniczy malejący

$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} & \text{dla } t \geq 0, \alpha > 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$



Sinusoidalny malejący wykładniczo

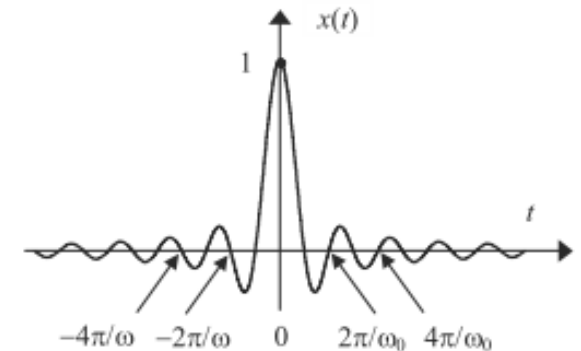
$$x(t) = \begin{cases} Ae^{-\alpha t} \sin(\omega_0 t) & \text{dla } t \geq 0, \alpha > 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$



Sinc(t)

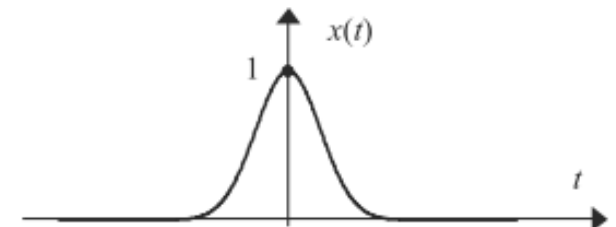
$$\text{Sinc}(\omega_0 t) = \begin{cases} \sin(\omega_0 t) / (\omega_0 t) & \text{dla } t \neq 0 \\ 1 & \text{dla } t = 0 \end{cases}$$

miejsca zerowe dla $t = k\pi / \omega_0, k = \dots, -1, 0, 1, \dots$



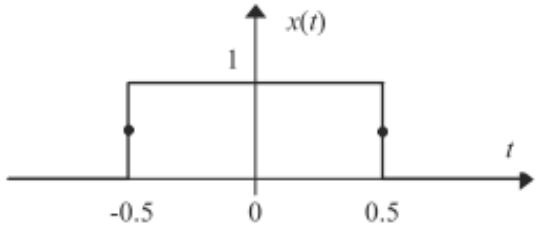
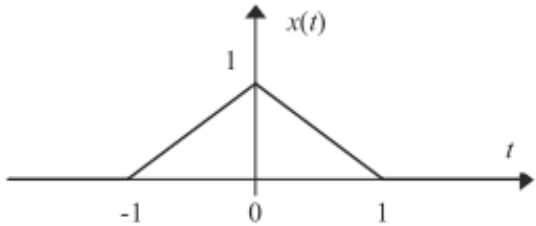
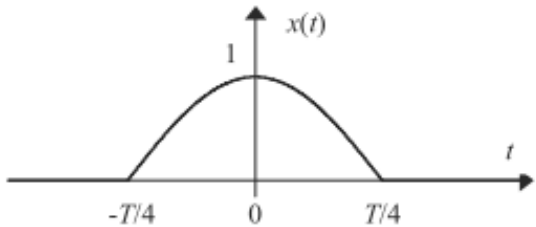
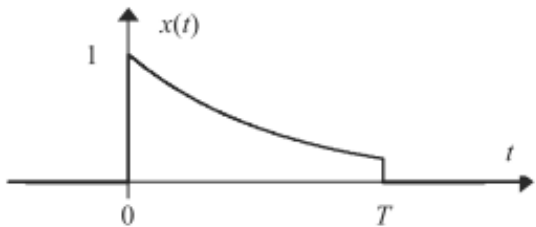
Gaussowski

$$x(t) = e^{-\pi t^2}$$



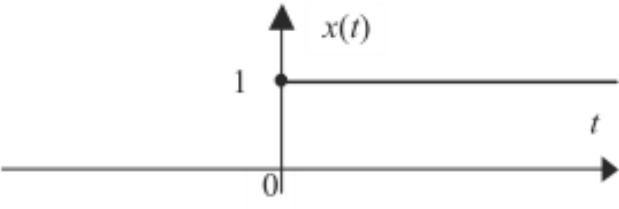
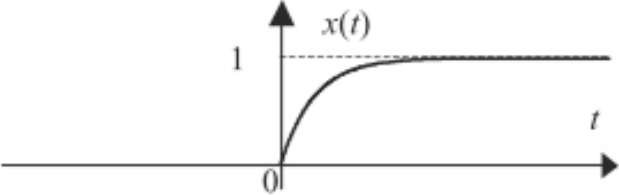
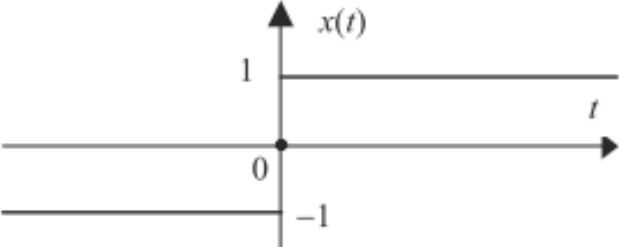
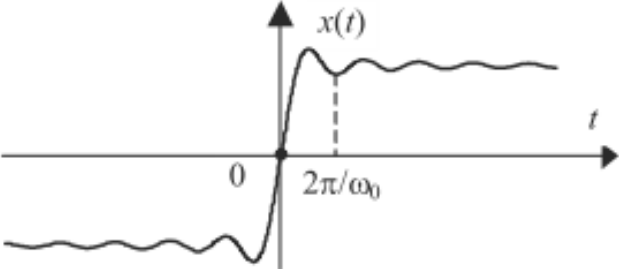
Przykładowe funkcje-sygnały cd

- impulsowe o ograniczonej energii

<p>Impuls prostokątny</p> $x(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t > 0.5 \\ 0.5 & \text{dla } t = 0.5 \\ 1 & \text{dla } t < 0.5 \end{cases}$	
<p>Impuls trójkątny</p> $x(t) = \Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla } t > 1 \\ 1 - t & \text{dla } t \leq 1 \end{cases}$	
<p>Impuls kosinusoidalny ($\omega_0 = 2\pi f_0, f_0 = 1/T$)</p> $x(t) = \cos \omega_0 t \cdot \Pi\left(\frac{t}{T/2}\right)$	
<p>Impuls wykładniczy</p> $x(t) = e^{-\alpha t} \Pi\left(\frac{t - T/2}{T}\right), \quad \alpha > 0$	

Przykładowe funkcje-sygnały cd

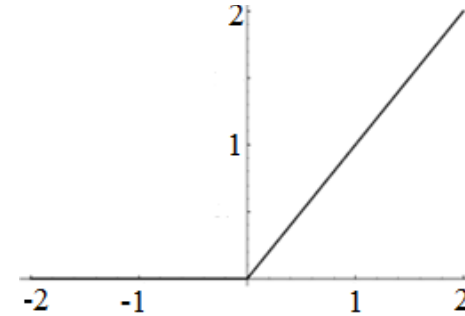
- O ograniczonej mocy średniej

<p>Skok jednostkowy</p> $x(t) = \mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t \geq 0 \\ 0 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$	
<p>Wykładniczy narastający</p> $x(t) = (1 - e^{-\alpha t}) \mathbf{1}(t), \quad \alpha > 0$	
<p>Funkcja znaku sgn(t)</p> $\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } t > 0 \\ 0 & \text{dla } t = 0 \\ -1 & \text{dla } t < 0 \end{cases}$	
<p>Całka z Sinc(t):</p> $\text{Si}(t) = \int_0^t \text{Sinc}(\tau) d\tau$	

Inne sygnały

- Rampowy, czyli sygnał o nieograniczonej energii i mocy

$$f(t) = r(t) = t \cdot \mathbf{1}(t) = \begin{cases} t, & \text{dla } t \geq 0 \\ 0, & \text{dla } t < 0 \end{cases}$$



- Delta Diraca – impuls jednostkowy - funkcja (w sensie matematycznym) o zadanych własnościach nie istnieje, jest to funkcjonał liniowy, dystrybucja; modeluje bardzo krótki impuls o jednostkowym polu

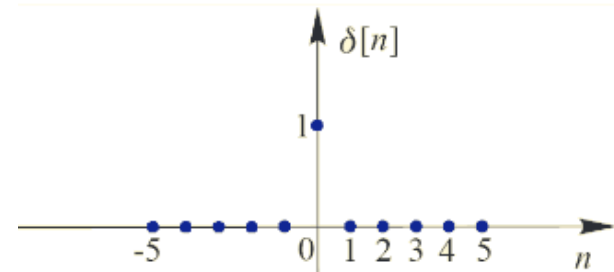
$$f(t) = \delta(t) = \begin{cases} +\infty, & \text{dla } t = 0 \\ 0, & \text{dla } t \neq 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$



- Delta Kroneckera (sygnały dyskretne, impuls jednostkowy) – dwa indeksy, np. bieżący indeks czasu i i moment przyłożenia sygnału wejściowego j

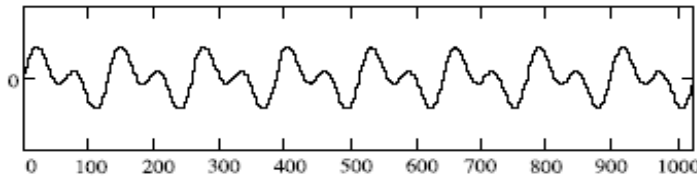
$$f(i, j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{dla } i = j \\ 0, & \text{dla } i \neq j \end{cases} \quad \delta_i = \begin{cases} 1, & \text{dla } i = 0 \\ 0, & \text{dla } i \neq 0 \end{cases}$$



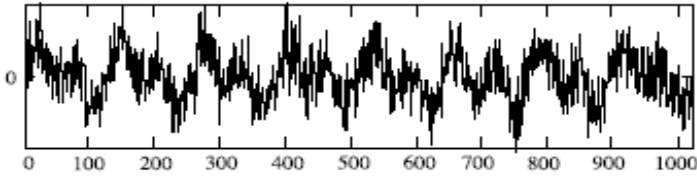
Informacja ukryta

REPREZENTACJE SYGNAŁÓW

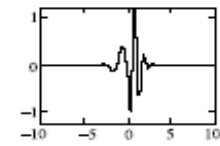
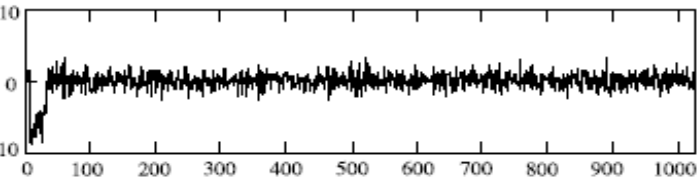
Przetwarzanie - ekstrakcja informacji za pomocą „małych modeli”



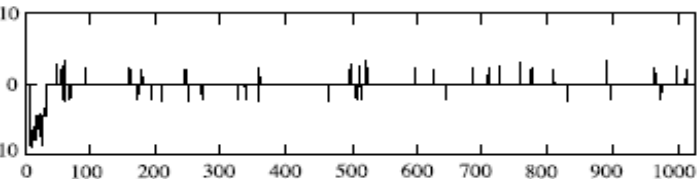
sygnał



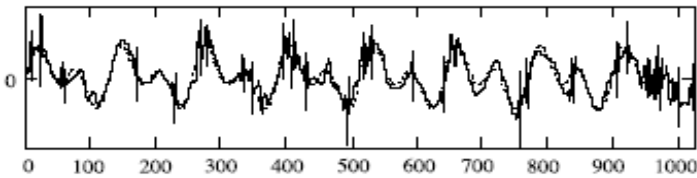
sygnał z szumem
(realne dane!)



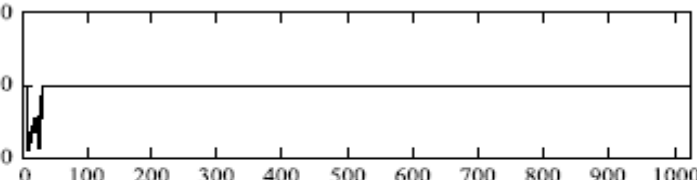
współczynniki bazy falkowej (iloczyn skalarny sygnału i bazy przekształcenia) jako **miara podobieństwa** sygnału do falek



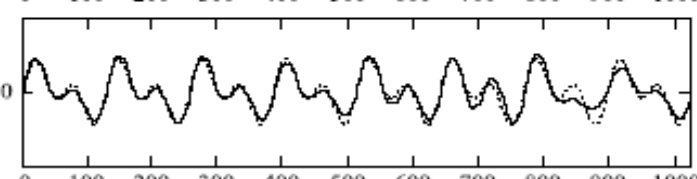
twarde prog. (2)



rekonstrukcja

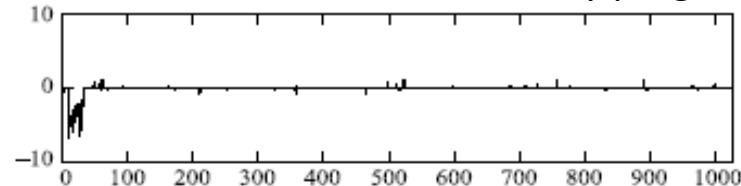


twarde prog. (4)

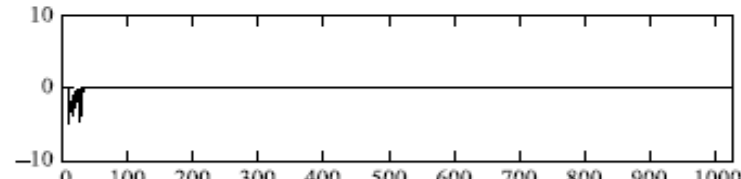
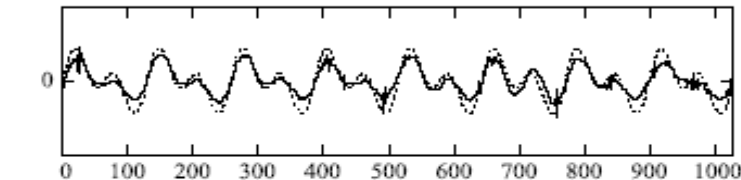


rekonstrukcja

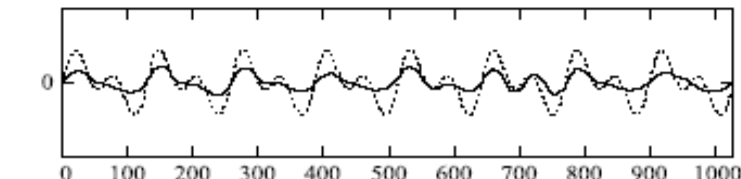
różne metody progowania



miękkie prog. (2)

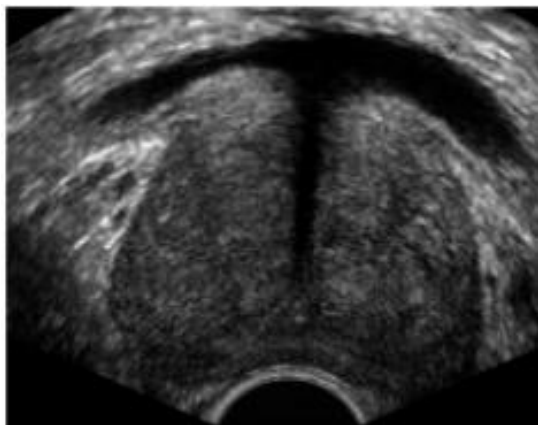


miękkie prog. (4)

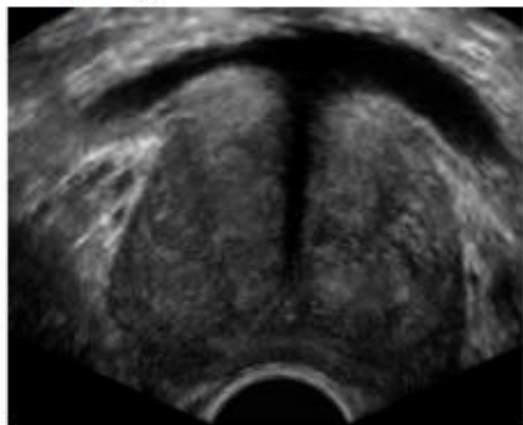


przerywany to sygnał

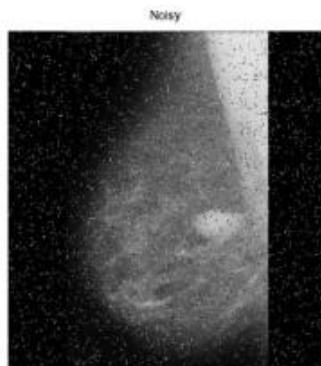
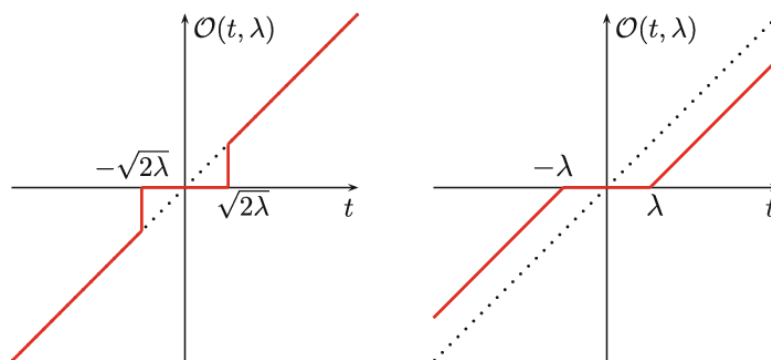
Efekty progowania



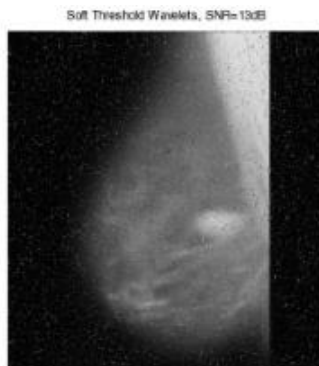
progowanie twarde



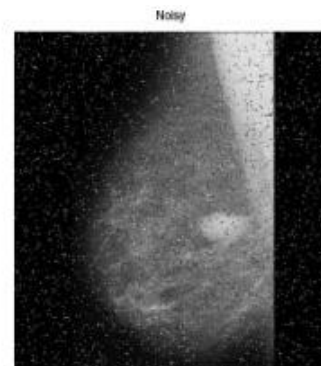
progowanie miękkie



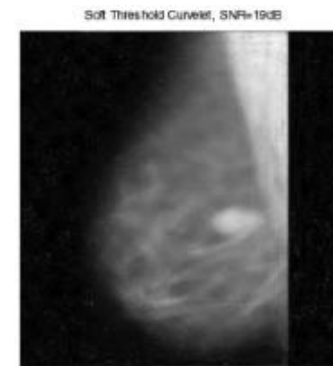
(a)



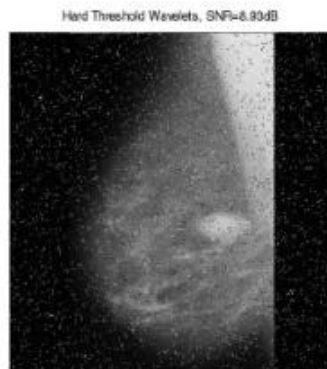
(b)



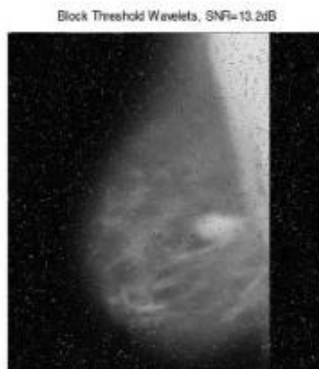
(a)



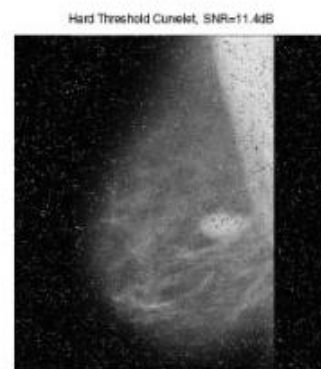
(b)



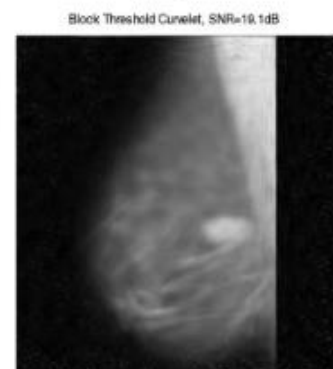
(c)



(d)



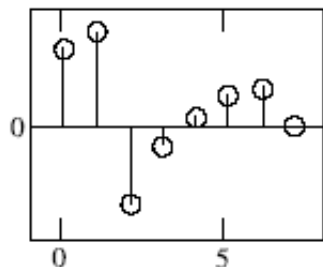
(c)



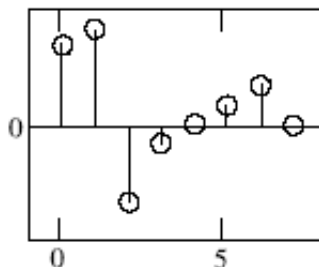
(d)

Rekonstrukcja poprzez kontrolowaną aproksymację

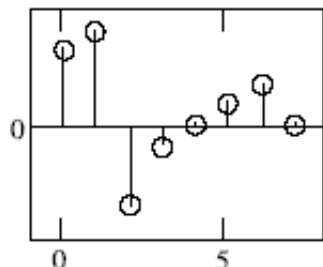
(progowanie współczynników falkowych)



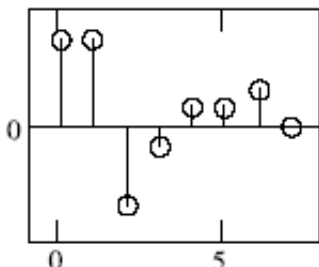
(a) (2,475,0,354,7,000,-0,500,-0,070,-2,121,-0,707,1,414)



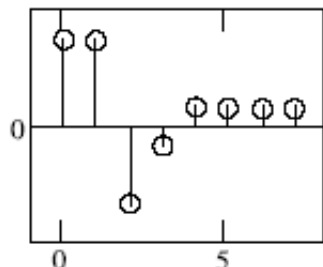
(b) (2,475,0,7,000,-0,500,-0,707,-2,121,-0,707,1,414)



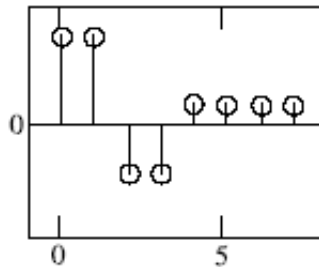
(c) (2,475,0,7,000,0,-0,707,-2,121,-0,707,1,414)



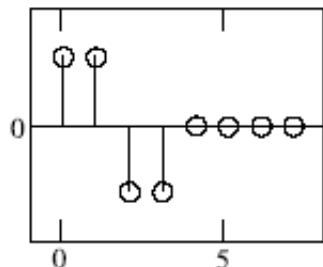
(d) (2,475,0,7,000,0,0,-2,121,0,1,414)



(e) (2,475,0,7,000,0,0,-2,121,0,0)



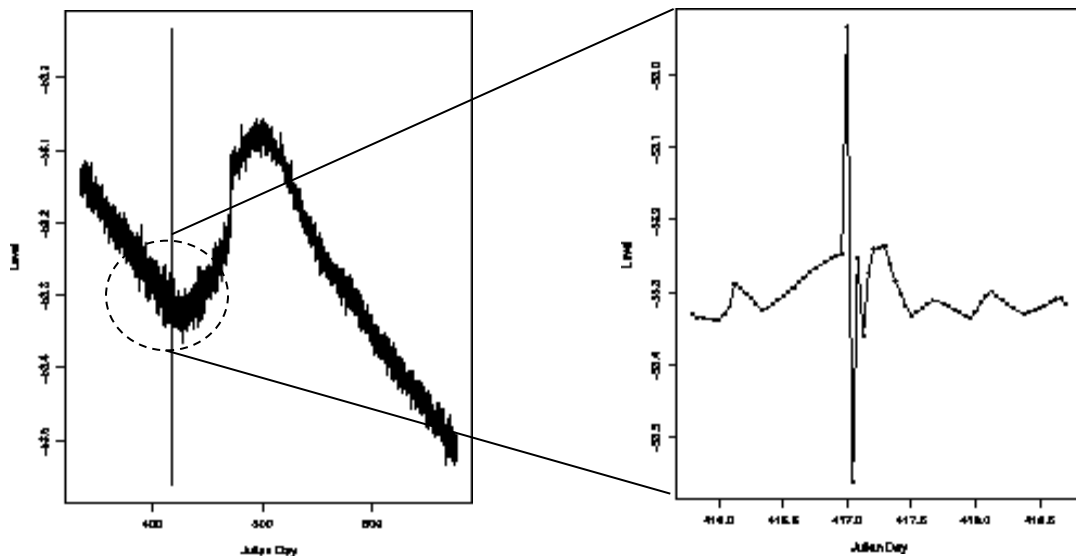
(f) (2,475,0,7,000,0,0,0,0,0,0)



(g) (0,0,7,000,0,0,0,0,0,0)

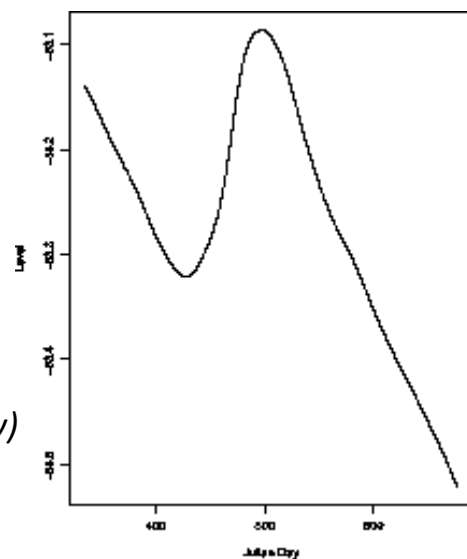
*odtworzenie sygnału z
niezerowych współczynników
falkowych i skalujących*

Dbałość o szczegóły, czyli falki!

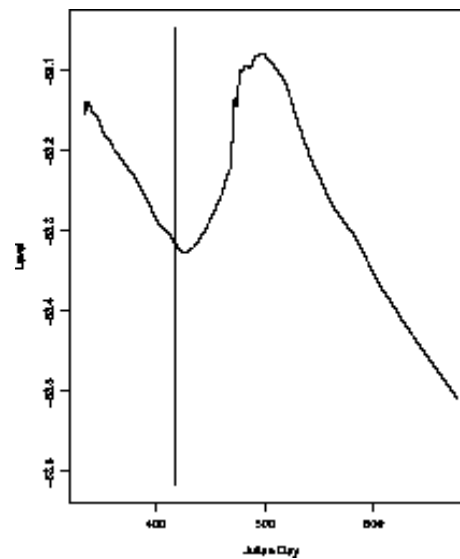


sygnał

Efekty odszumiania

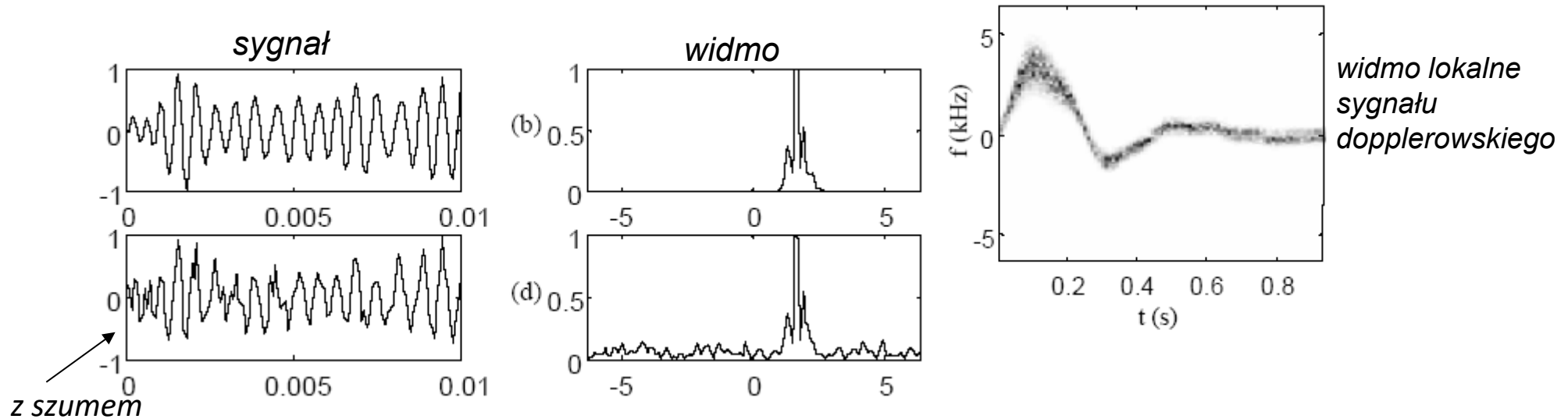


typowe uśrednianie (filtry)



lokalna rekonstrukcja za pomocą falek

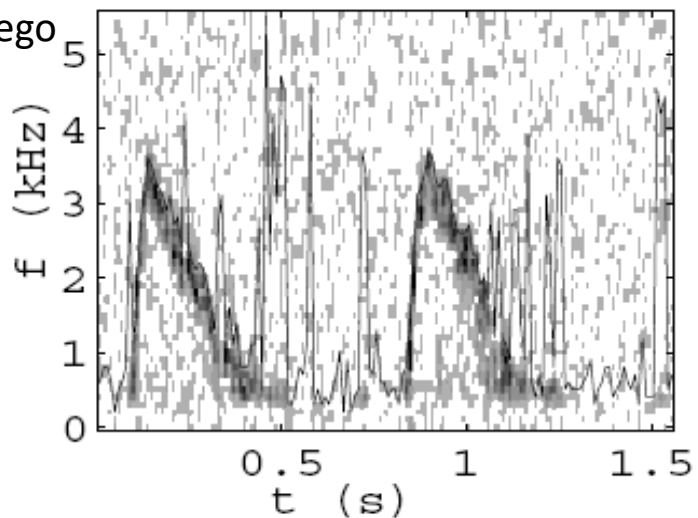
Przetwarzanie sygnału (dopplerowskiego)



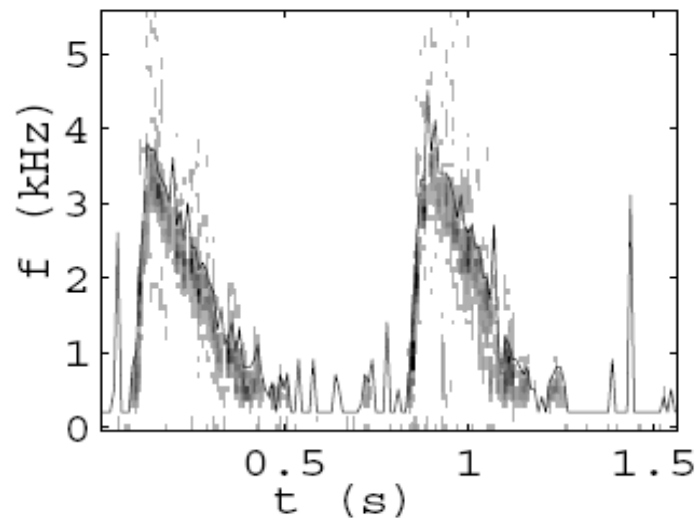
- odszumianie: wydobywanie sygnału zagnieżdżonego w szumie informacyjnym, czyli estymacja sygnału użytecznego
- ważne są lokalne zmiany, szczegóły
- metoda: maksymalne rozdzielanie sygnału i szumu (zwykle w nowej dziedzinie) + selekcja (najprościej progowanie)

Odszumianie dopplerowskie ...

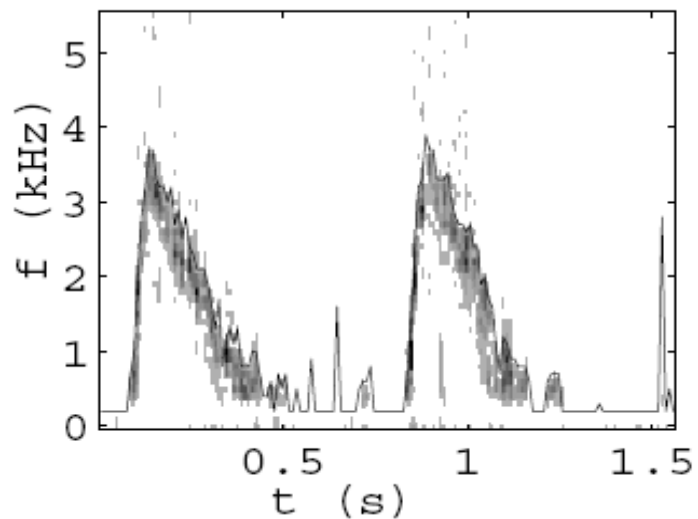
spektrogram sygnału
oryginalnego



(b) po odszumieniu (falka
rzędu 8)

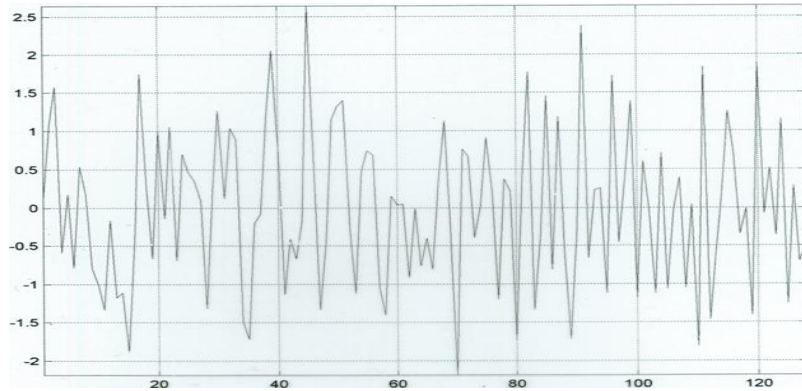


(c)

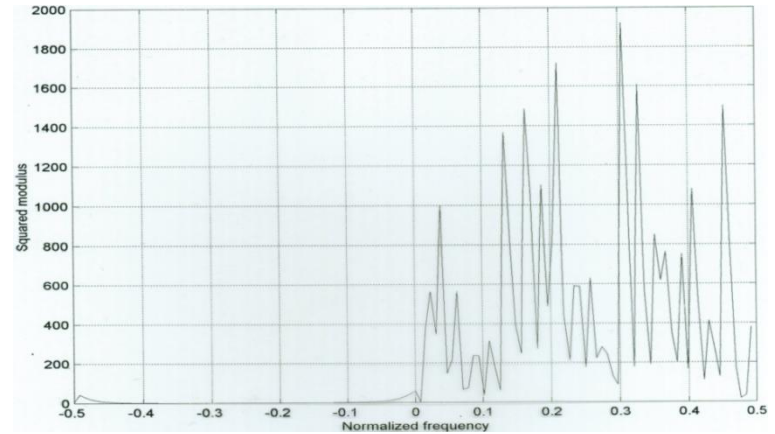


po odszumieniu (falka rzędu 4)

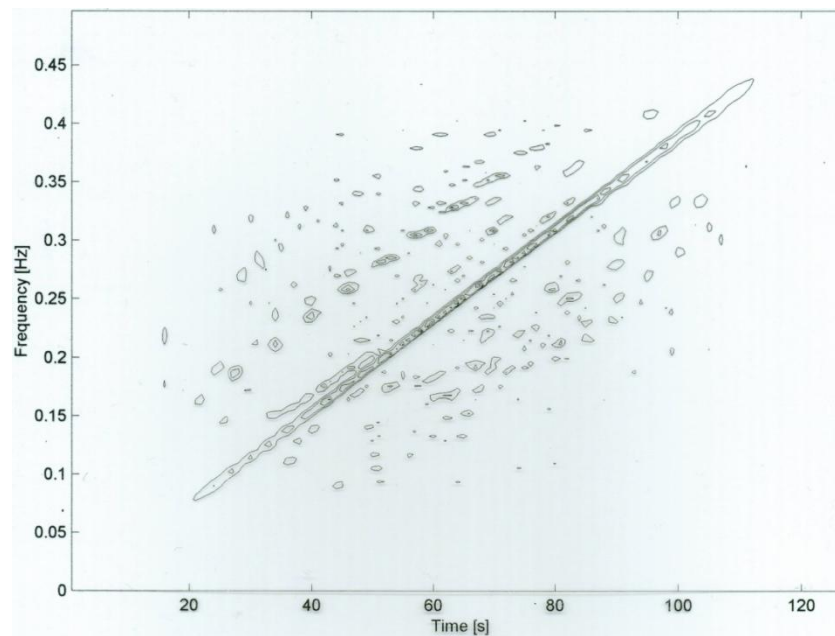
Poznanwanie, odkrywanie ...



sygnał



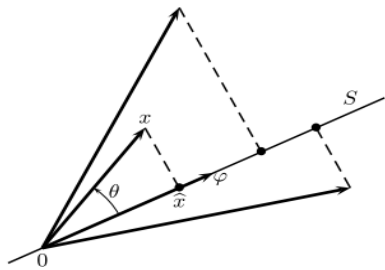
TF



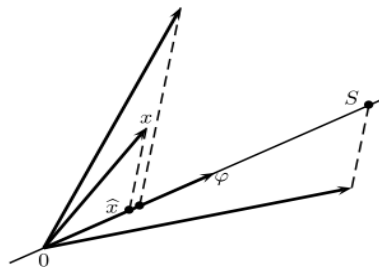
Transformata Wignera-Ville'a
(reprezentacja konturowa)

Sygnaly jako elementy z przestrzeni wektorów lub funkcji

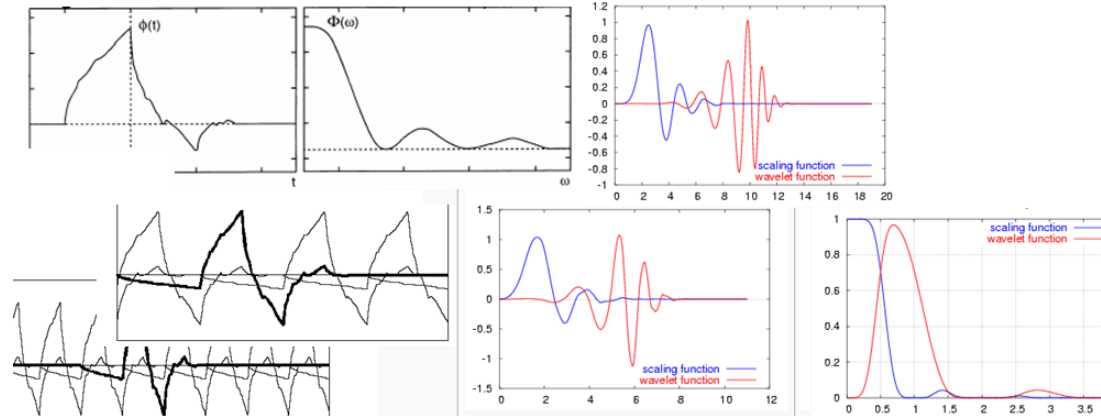
- Rzuty na podprzestrzeń



ortogonalny

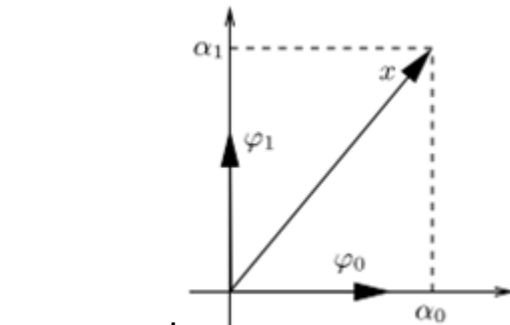


ukośny

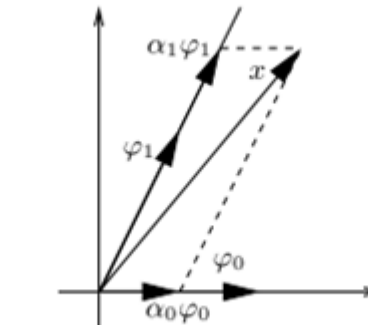


$$\hat{x} = \langle x, \varphi \rangle \varphi = (\|x\| \|\varphi\| \cos \theta) \varphi$$

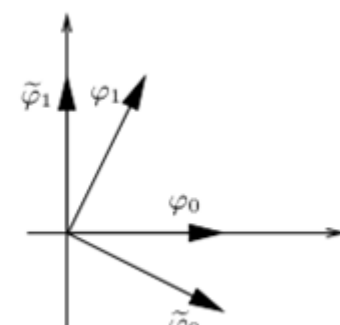
- Bazy



ortogonalna



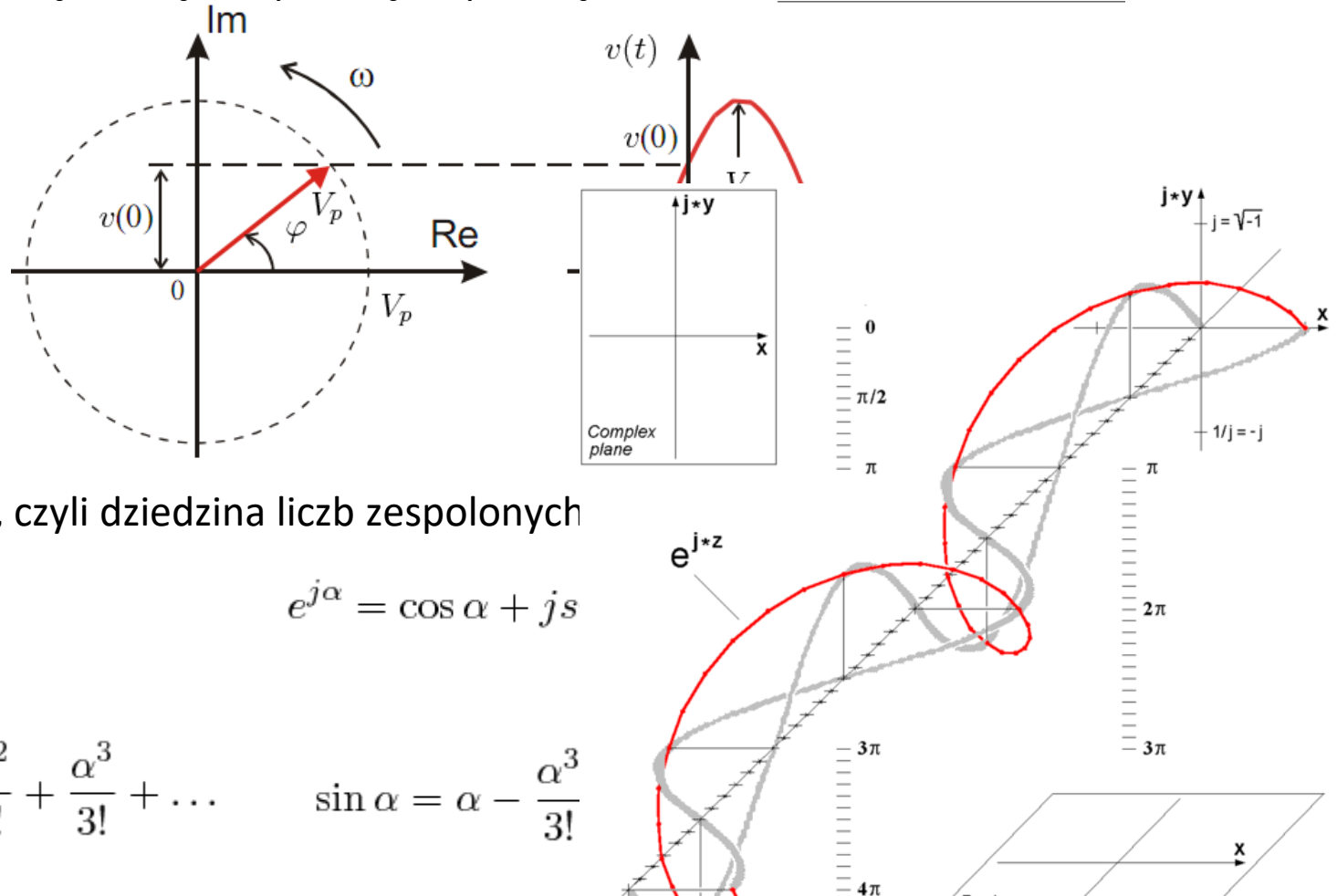
nieortogonalna



dwie bazy

Równoważność reprezentacji funkcji i wektorów (wskazów)

- Dla uproszczenia analizy, danemu sygnałowi sinusoidalnemu przypisujemy pewną liczbę zespoloną zwaną „amplitudą zespoloną” lub wskazem



- Wzór **Eulera**, czyli dziedzina liczb zespolonych

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

dowód

$$e^{\alpha} = 1 + \alpha + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \dots$$

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \dots$$

$$e^{j\alpha} = 1 + j\alpha + \frac{(j\alpha)^2}{2!} + \frac{(j\alpha)^3}{3!} + \dots = 1 + j\alpha - \frac{(\alpha)^2}{2!} + \frac{(j\alpha)^3}{3!} - \dots = (1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \dots) + j(\alpha - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots)$$

Relacja sygnał harmoniczny - wskaz

- Dla uproszczenia analizy, danemu **sygnałowi sinusoidalnemu** przypisujemy pewną liczbę zespoloną zwaną **amplitudą zespoloną** lub **wskazem** $V_p e^{j\varphi}$

$$v(t) = V_p \cos(\omega t + \varphi) \quad \leftrightarrow \quad \mathbf{V} = V_p e^{j\varphi} = a + jb$$

- Rekonstrukcja

$$v(t) = \Re\{\mathbf{V} \cdot e^{j\omega t}\} = \mathbf{Re}\{\mathbf{V} \cdot e^{j\omega t}\}$$

- Można też zapisać (realny pomiar)

$$v(t) = V_p \mathbf{Re}\{e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega t}\}$$

- Przykład: mając $\mathbf{V} = -3j$ oblicz $v(t)$

Liczymy

$$v(t) = \Re\{-3j \cdot e^{j\omega t}\} = \Re\{-3j \cdot (\cos \omega t + j \sin \omega t)\} = 3 \sin \omega t$$

Różniczkowanie/całkowanie wreszcie jest proste

- Operacjom różniczkowania i całkowania sygnału odpowiadają proste działania algebraiczne na wskazie reprezentującym sygnał
- Przykład: dla sygnału $v(t) = V_p \cos(\omega t + \varphi)$ policz pochodną $\frac{dv(t)}{dt}$

Liczmy więc:

$$y(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} V_p \cos(\omega t + \varphi) = -V_p \omega \sin(\omega t + \varphi) = -V_p \omega \cos(\omega t + \varphi - \pi/2)$$

wskaz reprezentujący $y(t)$ ma postać

$$\mathbf{Y} = Y_p e^{j\varphi'} = -V_p \omega \cdot e^{j(\varphi - \pi/2)} = -V_p \omega \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{-j\pi/2} = -V_p \omega \cdot e^{j\varphi} \cdot (-j) = j\omega V_p e^{j\varphi} = j\omega \mathbf{V}$$

czyli różniczkowanie sprowadza się do mnożenia wskazu przez $j\omega$

$$\mathbf{Y} = j\omega \mathbf{V}$$

analogicznie całkowanie realizujemy przez mnożenie wskazu przez $\frac{1}{j\omega}$

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{j\omega} \mathbf{V}$$

**INFORMACJA ANALITYCZNA
KOŁMOGOROWA**

Analityczna teoria informacji: aproksymacja informacji z zestawu funkcji (analiza sygnałów)

- Proces stochastyczny zastąpiono klasą funkcji (sygnałów) f określonych w dziedzinie T , tj. przez

$$\Theta = \{f(t) : t \in T\}$$

- Dowolna f_0 jest aproksymowana i dyskretyzowana w koderze K przez

$$\tilde{f} = \mathcal{K}(f_0)$$

dobraną z sieci aproksymacji

$$\Theta_{\mathcal{K}} = \{\tilde{f} : \exists_{f \in \Theta} \tilde{f} = \mathcal{K}(f)\}$$

przy ograniczeniu

$$\sup_{f \in \Theta} \|f_0 - \mathcal{K}(f_0)\| \leq \varepsilon$$

i minimalnym rozmiarze sieci

- ε -entropia Kołmogorowa jako miara informacji

$$H_{\varepsilon}(\Theta, \|\cdot\|) = \log_2 \left[\min_{\mathcal{K} \in \mathcal{Z}_{\varepsilon, \|\cdot\|}} N(\Theta_{\mathcal{K}}) \right]$$

Aproksymacja (informacji) za pomocą zestawu funkcji

a) pomierzone sygnały realne (o skończonej energii)

ciągły $\longrightarrow s(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbf{R})$, czyli $\int_{-\infty}^{+\infty} |s(t)|^2 dt < +\infty$ $\xrightarrow{\text{dyskretny}}$ $s \in \mathbf{I}^2(\mathbf{Z})$, czyli $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |s_n|^2 < +\infty$

analiza funkcjonalna

b) interpolacja sygnału w bazie przekształcenia ϕ (sygnał rzadki w bazie atomów)

$$s(t) = \sum_n a_n \phi(t-n), \text{ gdzie } a_n = \langle s, \phi_n \rangle = \int s(t) \phi_n(t); \quad \phi_n(t) = \phi(t-n)$$

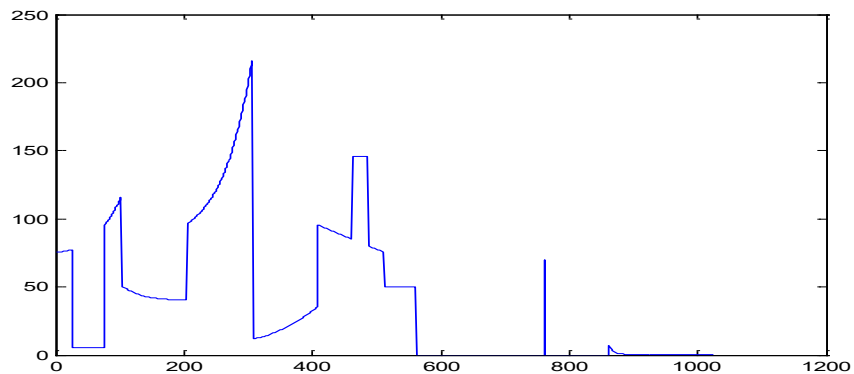
c) aproksymacja, czyli reprezentacja 'istoty' sygnału za pomocą M komponentów

liniowa $\longrightarrow \tilde{s} = \sum_{n=1}^M a_n \phi_n$

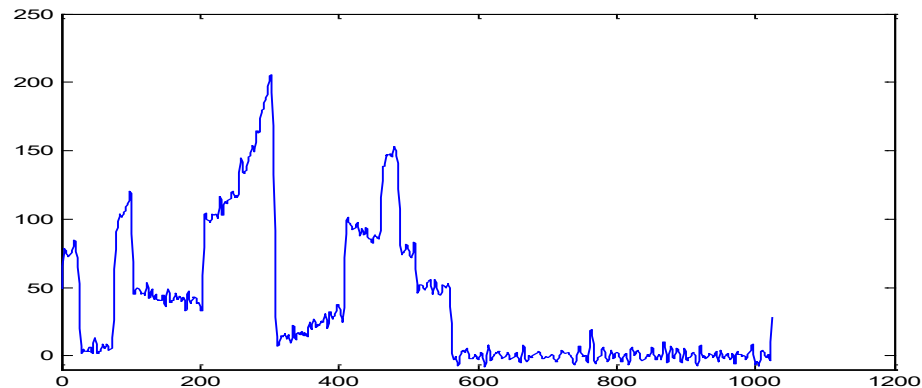
$\longrightarrow \tilde{\tilde{s}} = \sum_{n \in A_M} a_n \phi_n$

nieliniowa (A_M jest zbiorem indeksów M największych – co do modułu współczynników albo „najważniejszych”)

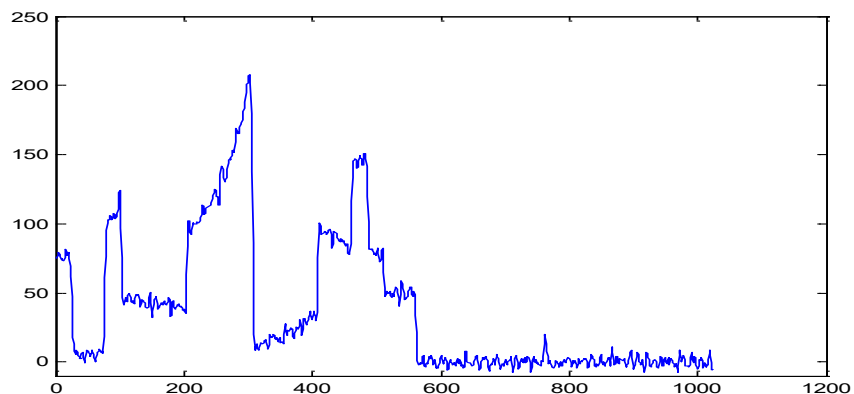
Doskonalenie reprezentacji rzadkiej (upakowanie informacji) metodą aproksymacji nieliniowej z 15% współczynników



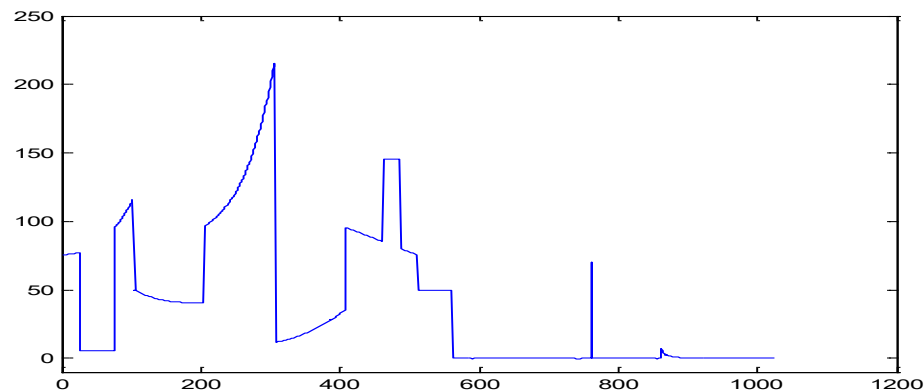
sygnał oryginalny



z wyk. transformaty Fouriera ($D=45,5$)



z wyk. transformaty DCT ($D=37,4$)



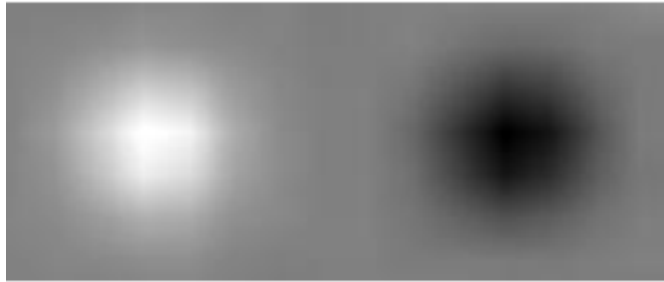
z wyk. transformaty falkowej ($D=0,008$)

*15 % współczynników nowej dziedziny
(największych) opisuje sygnał – problem
NADMIAROWOŚCI*

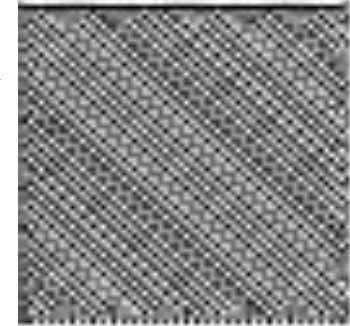
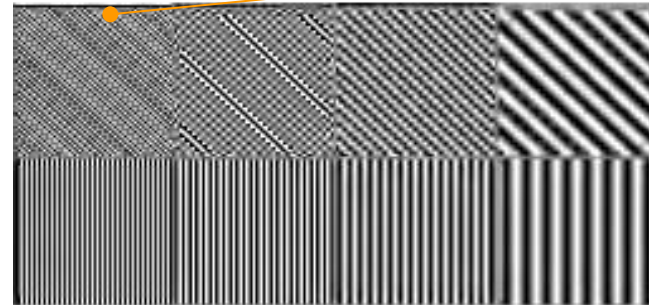
**Reprezentacja informacji poprzez redukcję wymiarowości
sygnału – problem ustalenia istoty sygnału (informacja)**

Dobór bazy funkcji (falek)

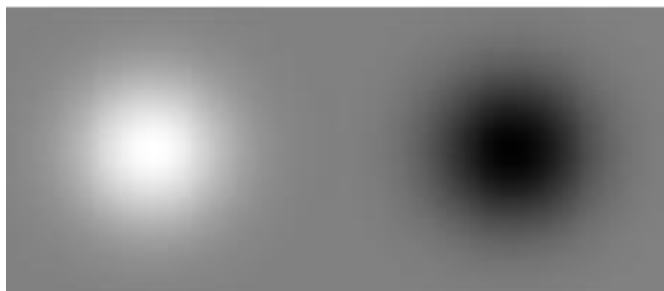
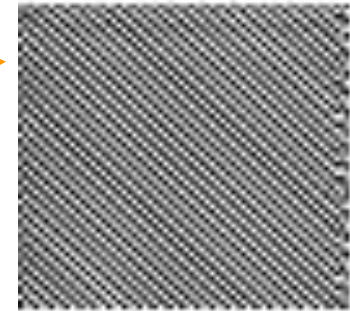
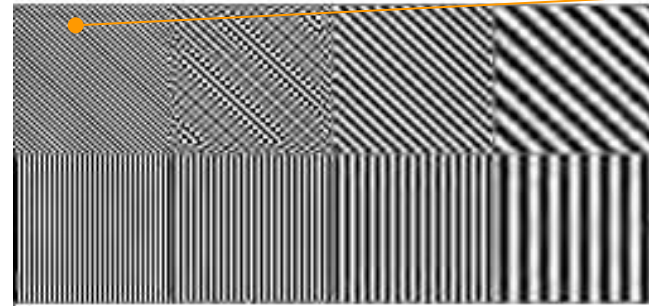
Nieliniowa aproksymacja cech obrazu testowego (limitowany procent współczynników)



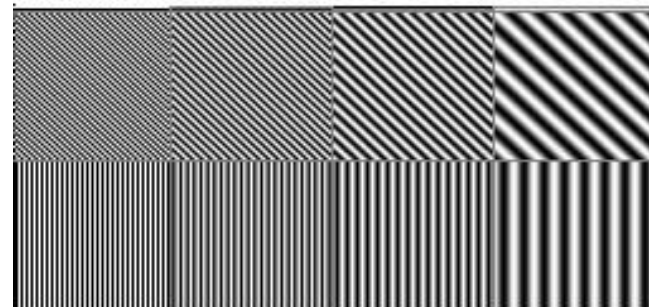
bank filtrów
5/3



bank filtrów
17/11



oryginał



→

→

Reprezentacje aproksymacji

13,6% współczynników



falkowa

wedgetowa

curveletowa

DFT

REPREZENTACJE FALKOWE

Falki czyli modelowanie natury

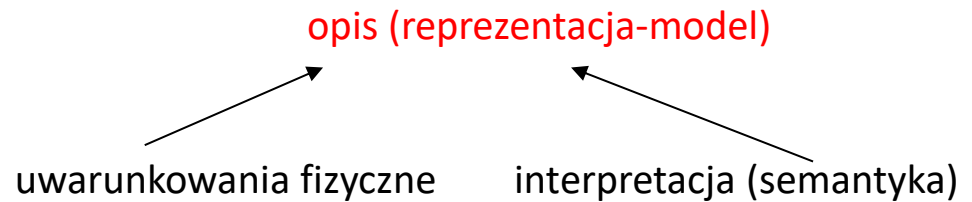
Falki opisują (skutecznie reprezentują) naturalne, realne sygnały wokół nas

Yves Meyer:

Falki, gdziekolwiek one są ..., nie pomagają nam wyjaśnić faktów naukowych, ale pozwalają opisać rzeczywistość wokół nas, bez względu na to jak bardzo jest naukowa ...

Falkowe korzyści:

- **Naturalny opis** w wielu skalach
- **Hierarchia i zależność** informacji
- **Selektywność** informacji
- **Upakowanie** informacji (sprawne zarządzanie)
- Łatwiejsza **identyfikacja** informacji (użytecznej)
- **Kompozycja** (synteza) informacji w różnej postaci
- **Klasyfikacja** jakościowa i ilościowa



Definicja falki

- Falka to **funkcja f** o następujących właściwościach:

a) $f \in L^2(\mathbb{R})$, czyli **energia f jest skończona**: $\int |f(t)|^2 dt < \infty$

b) **wartość średnia f wynosi zero**, $\int f(t) dt = 0$

Warunki te wymuszają co najmniej kilka oscylacji

c) alternatywnie do a) i b): $\int \frac{|F(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$

Warunki a) i b) oraz c) są równoważne, jeśli f zanika szybciej niż $|t|^{-1}$ dla $t \rightarrow \infty$

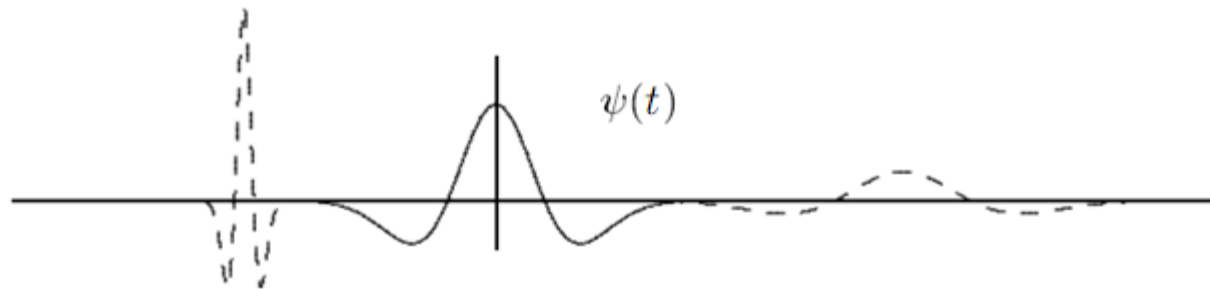
- Cechy:

- silnie wyróżniona jest **lokalizacja w czasie**, tj. funkcja jest 'lokalna'
 - nośnik (zbiór niezerowych wartości) jest zwarty (czyli domknięty-zupełny i ograniczony) i niepusty
 - nośnik jest 'prawie zwarty' (widmo częstotliwościowe ma zwarty nośnik)
 - kształt przypomina gasnące pobudzenie ośrodka, tj. falę z gasnącymi amplitudami kolejnych oscylacji oddalających się od zaburzenia centralnego

Transformacja falkowa

- Baza przekształcenia liniowego: rodzina falek

$$\psi^{s,x}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-x}{s}\right), \quad s \neq 0$$

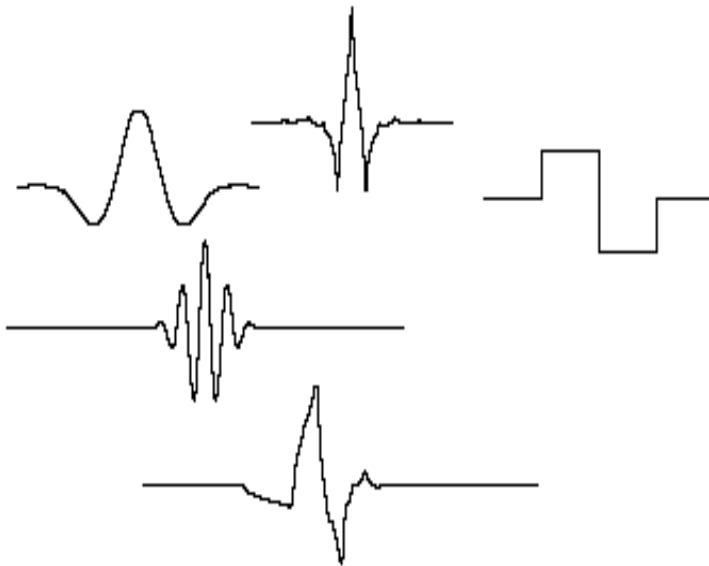


- Transformacja falkowa (ciągła)

$$\mathcal{W}_f(s, x) = \langle f, \psi^{s,x} \rangle = \int f(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^*\left(\frac{t-x}{s}\right) dt$$

Problem doboru bazy przekształcenia

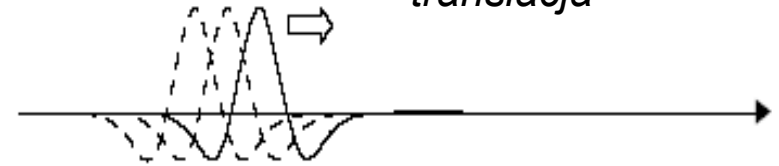
przykładowe falki:



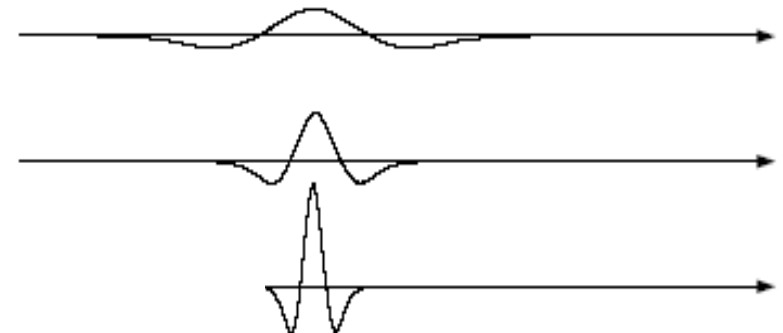
baza falkowa

$$\psi^{s,x}(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi\left(\frac{t-x}{s}\right), \quad s \neq 0$$

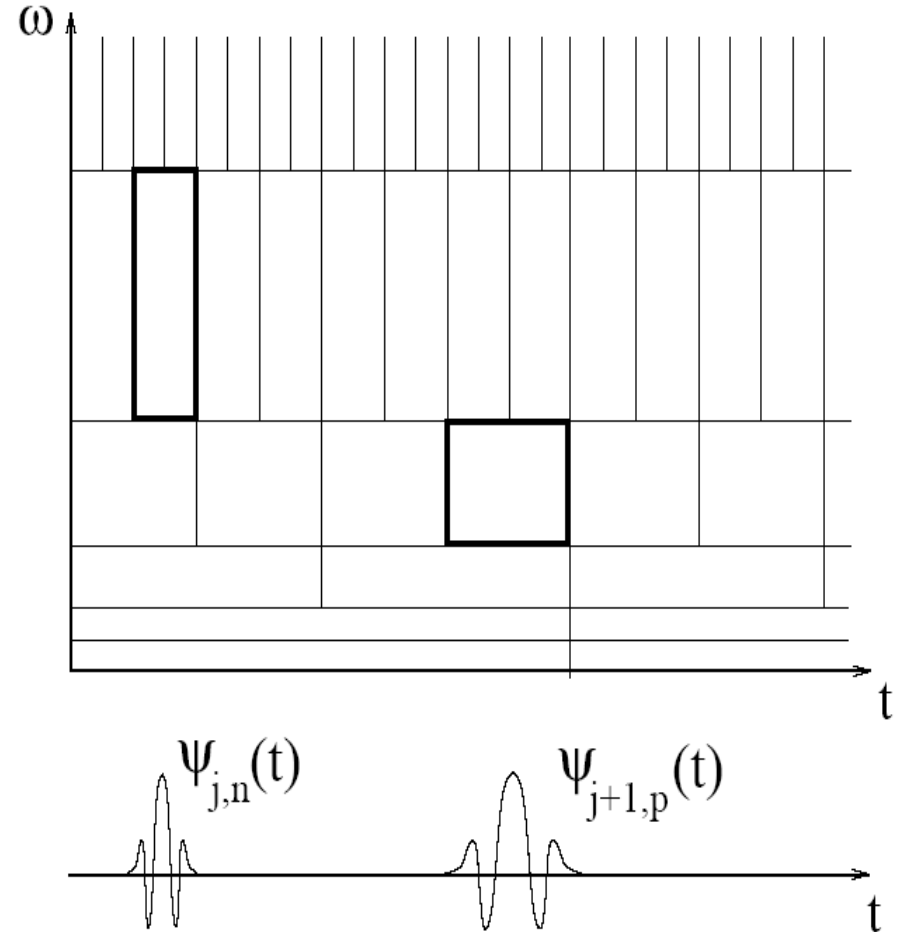
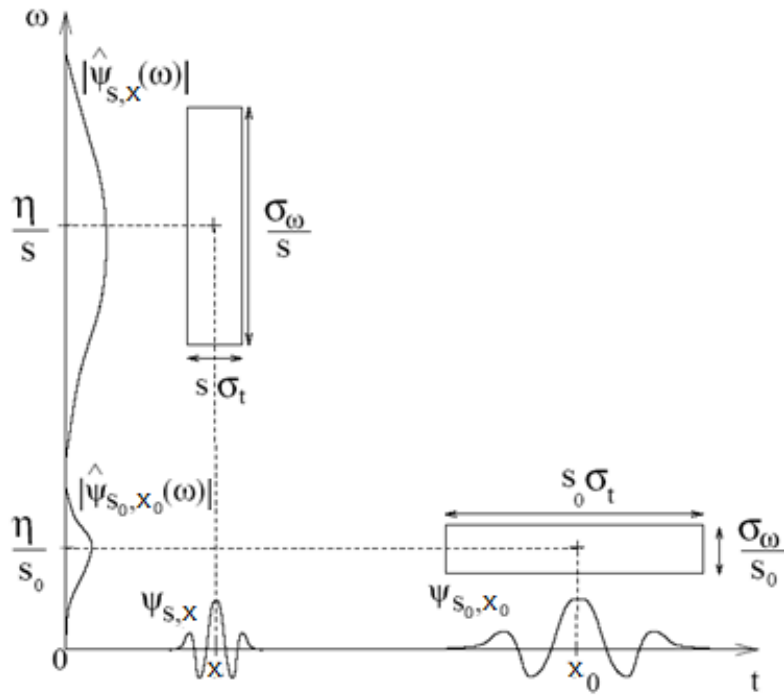
translacja



skalowanie



Falkowa dziedzina (atomy czas-skala)



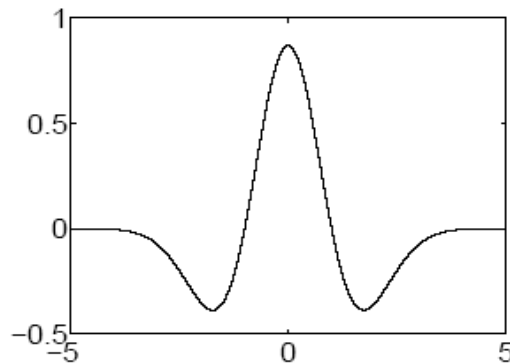
Podział przestrzeni czas-częstotliwość na 'różne atomy'

Ciągła transformacja falkowa

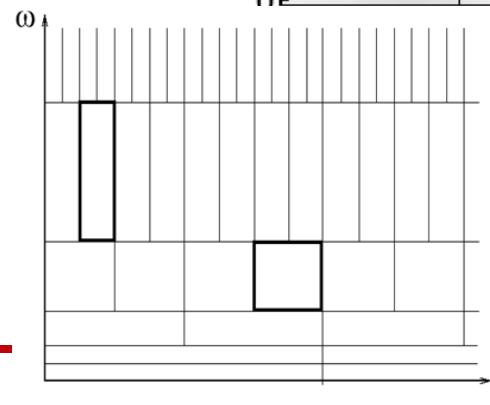
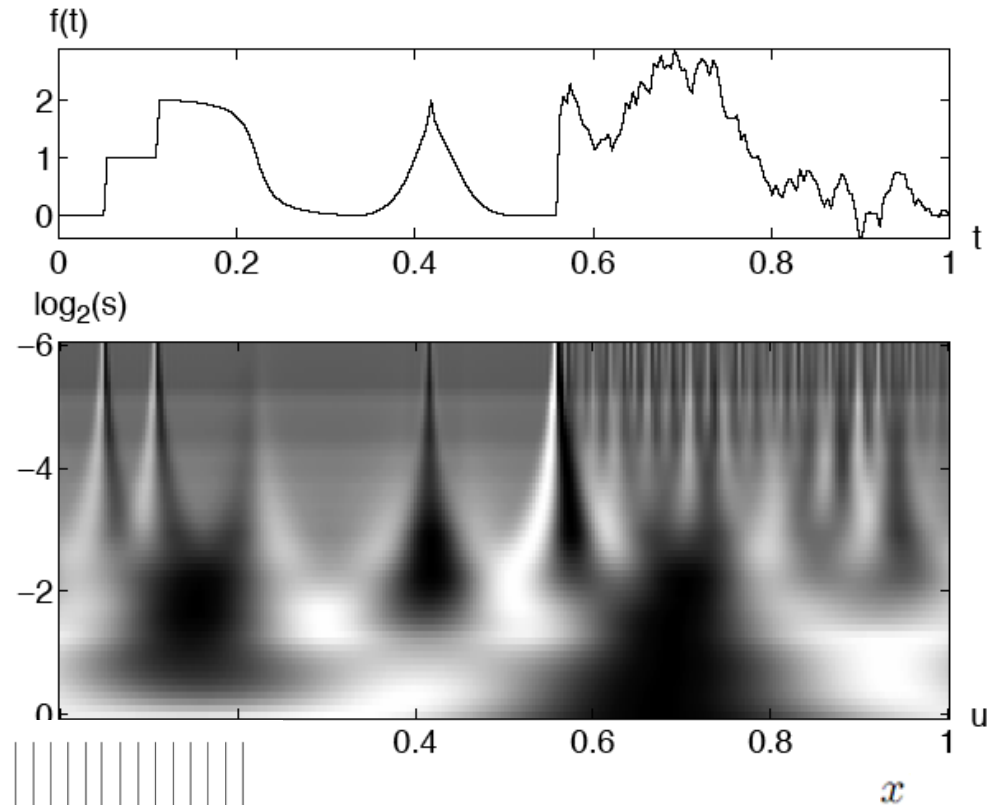
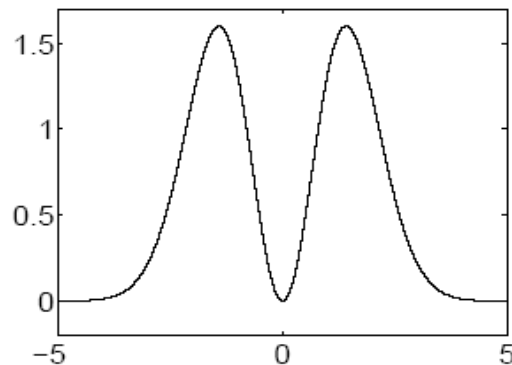
A Wavelet Tour of Signal Processing
Stéphane Mallat, Academic Press 1999 (2nd edition)

Przykład: kapelusz meksykański
(druga pochodna f. Gaussowskiej)

$$g(x) = (1 - x^2)e^{-\frac{1}{2}x^2}$$



moduł TF



$$\mathcal{W}_f(s, x) = \langle f, \psi^{s,x} \rangle = \int f(t) \frac{1}{\sqrt{|s|}} \psi^* \left(\frac{t-x}{s} \right) dt$$

Ciągła transformacja falkowa – rekonstrukcja (synteza)

rekonstrukcja:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int \frac{1}{\sqrt{|s|}} W_f(s, x) \psi\left(\frac{t-x}{s}\right) ds dx$$

warunek na falki:

$$C_\psi = \int |\psi(t)|^2 \frac{dt}{t} < \infty$$

uproszczony warunek na widmo:

$$\psi(0) = 0$$

Problemy z dokładną rekonstrukcją – rozwiązanie:
transformacja dyskretna

Przykładowe falki nieskończone

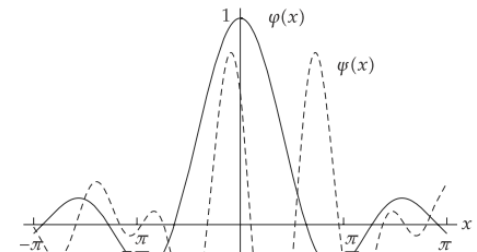
- Falka Shannona (część rzeczywista falek harmonicznyc, gładka - C^∞ , czyli wszystkie funkcje analityczne)

falki harmoniczne: $\psi_k^n(x) \stackrel{\text{def}}{=} 2^{n/2} \frac{e^{4\pi i(2^n x - k)} - e^{2\pi i(2^n x - k)}}{2\pi i(2^n x - k)}$

falka Shannona w dz. częstotliwości: $\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega} [\chi(2\omega) + \chi(-2\omega)]$

falka Shannona

$$\psi(x) = \frac{\sin \pi(x - 1/2) - \sin 2\pi(x - 1/2)}{\pi(x - 1/2)} = \frac{e^{-2i\pi x}(-i + e^{i\pi x} + e^{3i\pi x} + ie^{4i\pi x})}{(\pi - 2\pi x)}$$



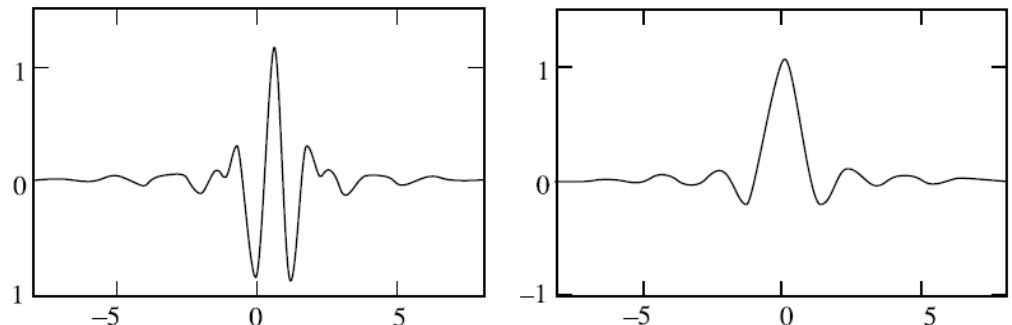
- Falka Meyera (C^∞ , zanika szybciej niż funkcja potęgowa)

$$\Psi(\omega) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin\left(\frac{\pi}{2} \nu\left(\frac{3|\omega|}{2\pi} - 1\right)\right) e^{j\omega/2} & \text{if } 2\pi/3 < |\omega| < 4\pi/3 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2} \nu\left(\frac{3|\omega|}{4\pi} - 1\right)\right) e^{j\omega/2} & \text{if } 4\pi/3 < |\omega| < 8\pi/3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad f. \text{ skalująca } \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \text{if } |\omega| < 2\pi/3 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos\left(\frac{\pi}{2} \nu\left(\frac{3|\omega|}{2\pi} - 1\right)\right) & \text{if } 2\pi/3 < |\omega| < 4\pi/3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\nu(x) := \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ x & \text{if } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{if } x > 1 \end{cases}$$

przykładowa

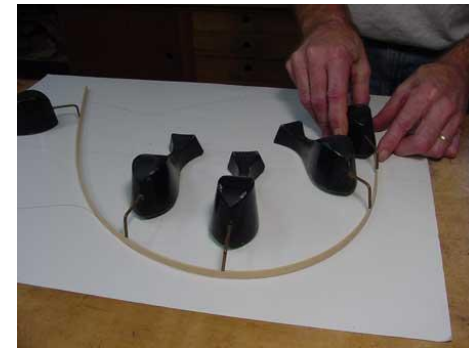
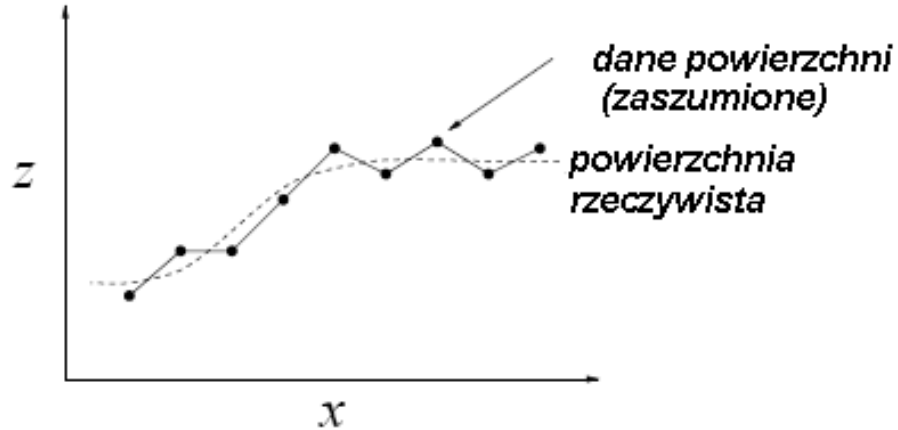
$$\nu(x) := \begin{cases} x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3) & \text{if } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$



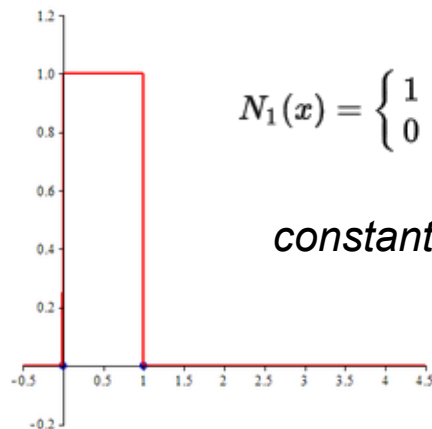
falka Meyera wraz z funkcją skalującą

Funkcje sklejane do konstrukcji falek

- Spline, czyli wpasowanie modelu w dane rzeczywiste

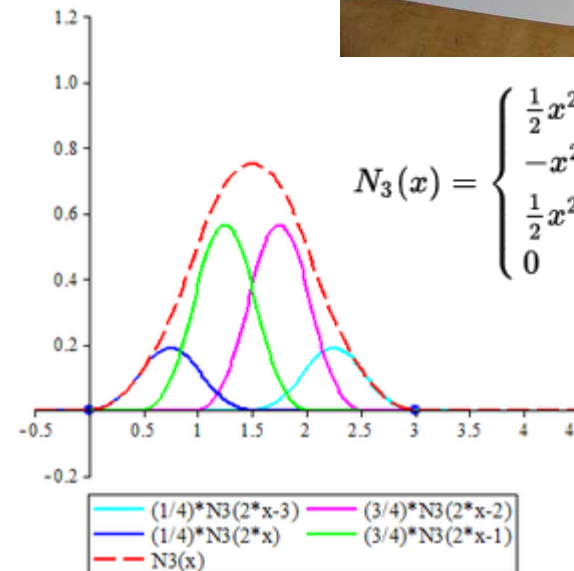


- B-spline



$$N_1(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

constant B-spline



$$N_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 & 0 \leq x < 1 \\ -x^2 + 3x - \frac{3}{2} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2} & 2 \leq x < 3 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

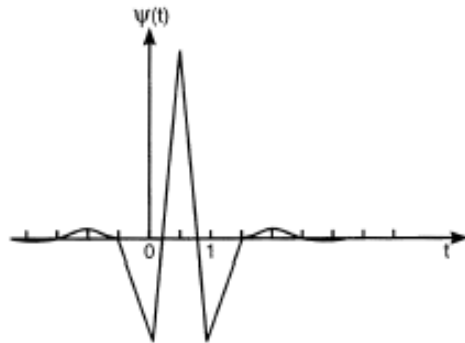
Sklejane falki nieskończone

- Falki Lemarie-Battle (C^m , m – liczba ciągłych pochodnych, zanikające wykładniczo) - projektowanie w dziedzinie częstotliwości, baza falek ortogonalnych, symetrycznych, ale z filtrami NOI (nie ma zwartego nośnika)

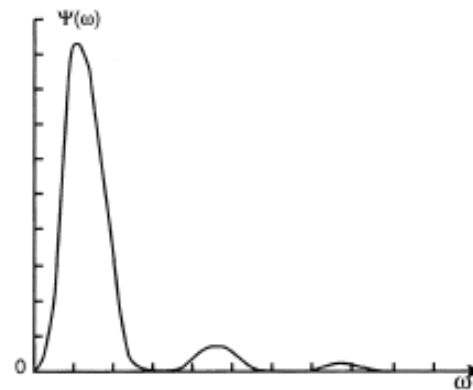
funkcje sklejane rzędu m

$$\hat{\phi}_m(\omega) = \frac{\hat{N}_m(\omega)}{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_m(\omega + 2\pi k)|^2\right)^{1/2}}$$

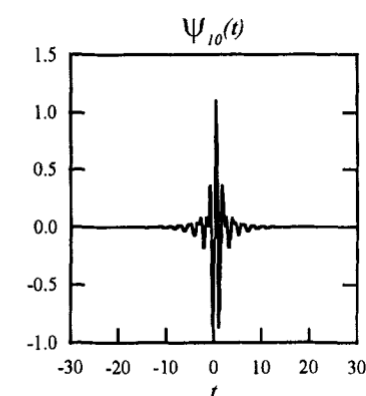
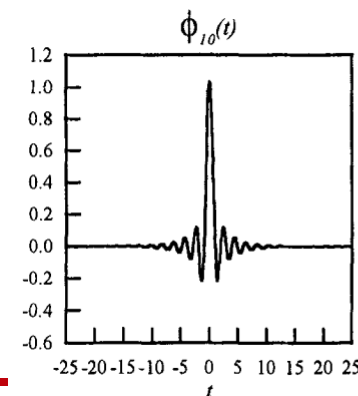
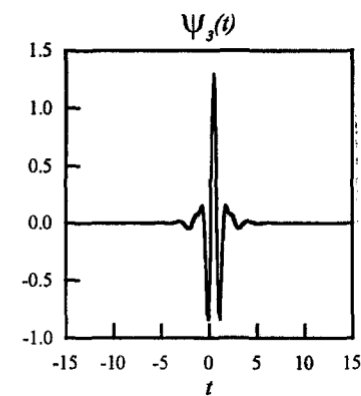
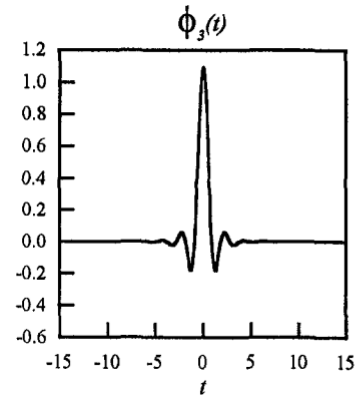
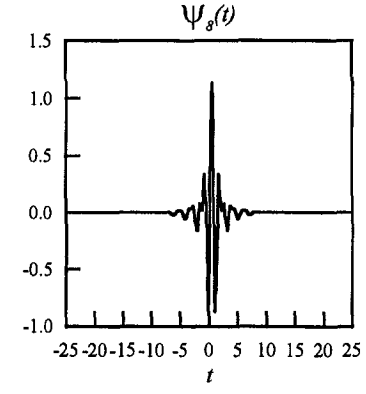
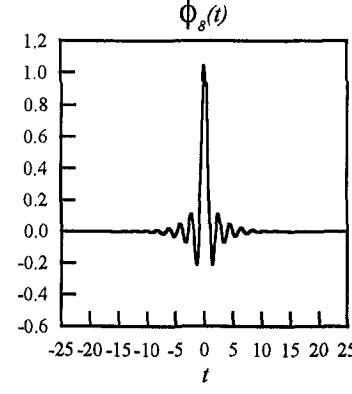
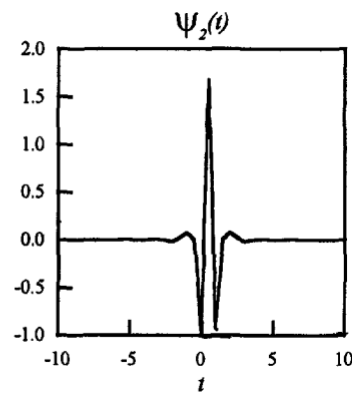
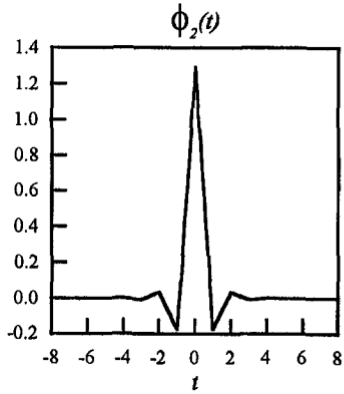
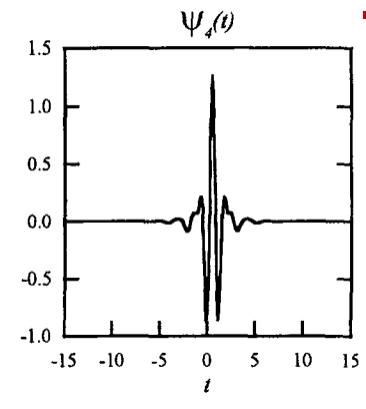
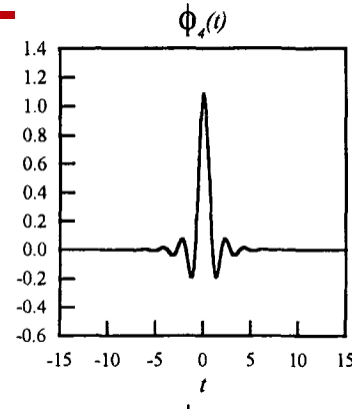
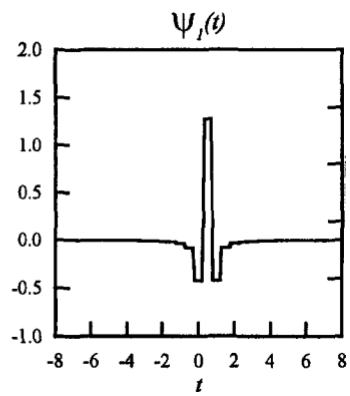
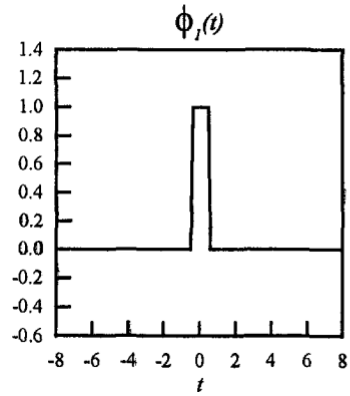
$$\hat{\psi}_{BL,m}(\omega) = -\frac{e^{-i\omega/2} \overline{\hat{\phi}_m(\omega + 2\pi)} \hat{\phi}_m\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\hat{\phi}_m\left(\frac{\omega}{2} + \pi\right)}$$



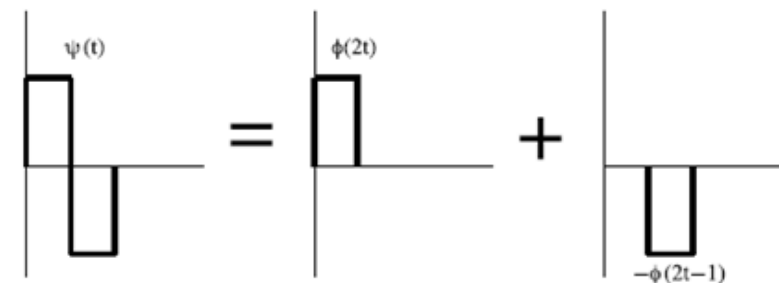
$m=2$



Rodzina falek Lemarie-Battle sklejanych (spline wavelets) o nieskończonym nośniku



Falki skończone (*compactly supported wavelets*): ortogonalna baza falek Haara, jedyna jako symetryczna

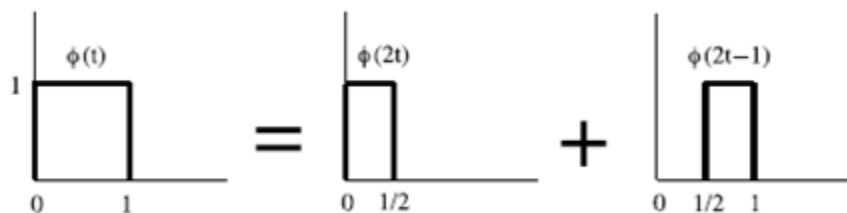
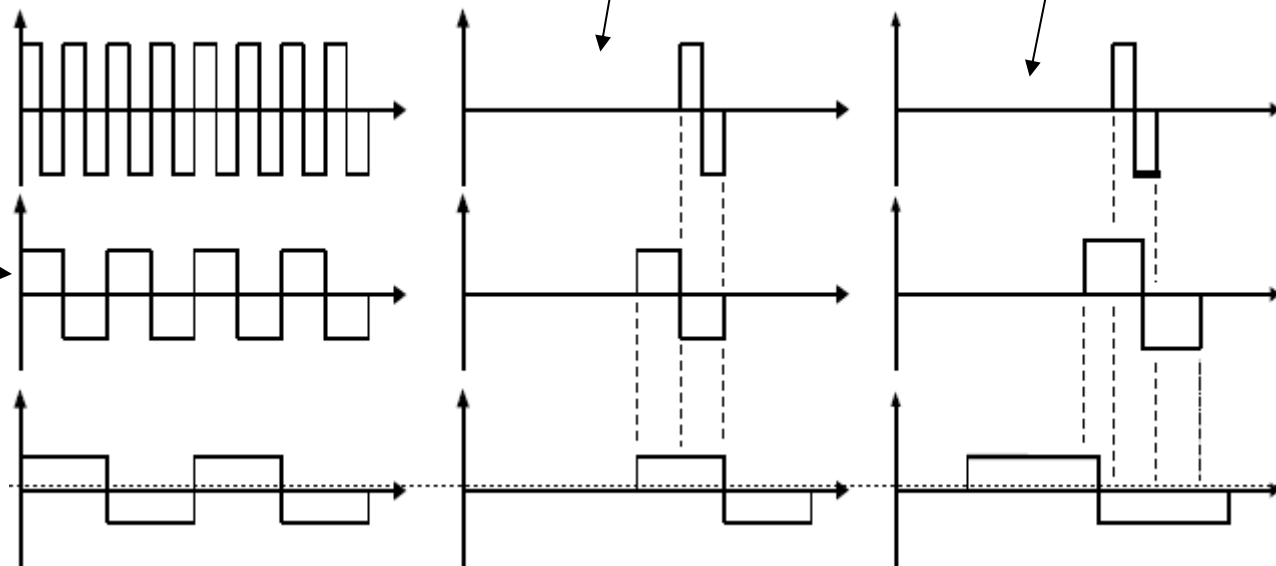


konstrukcja falki

*baza ortogonalna
w skali diadycznej*

*falki nie są wzajemnie
ortogonalne w innej
skali*

skala diadyczna



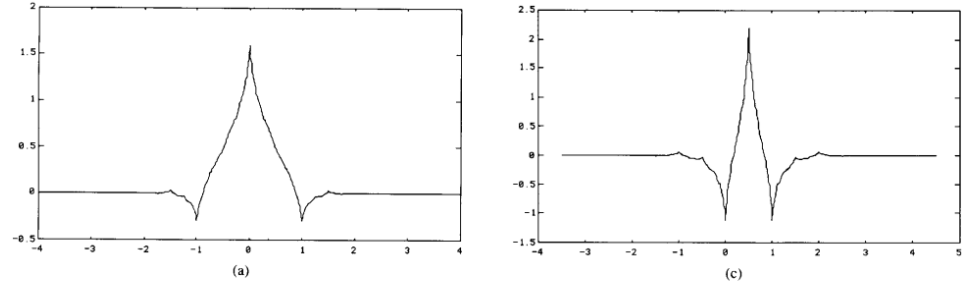
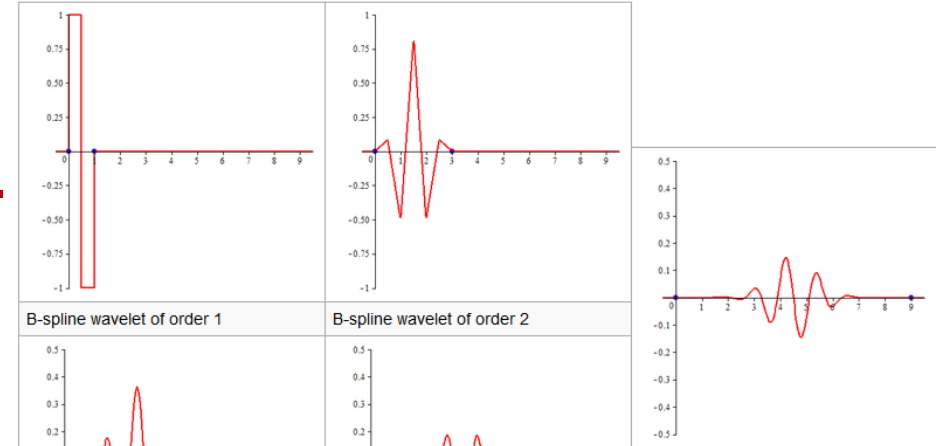
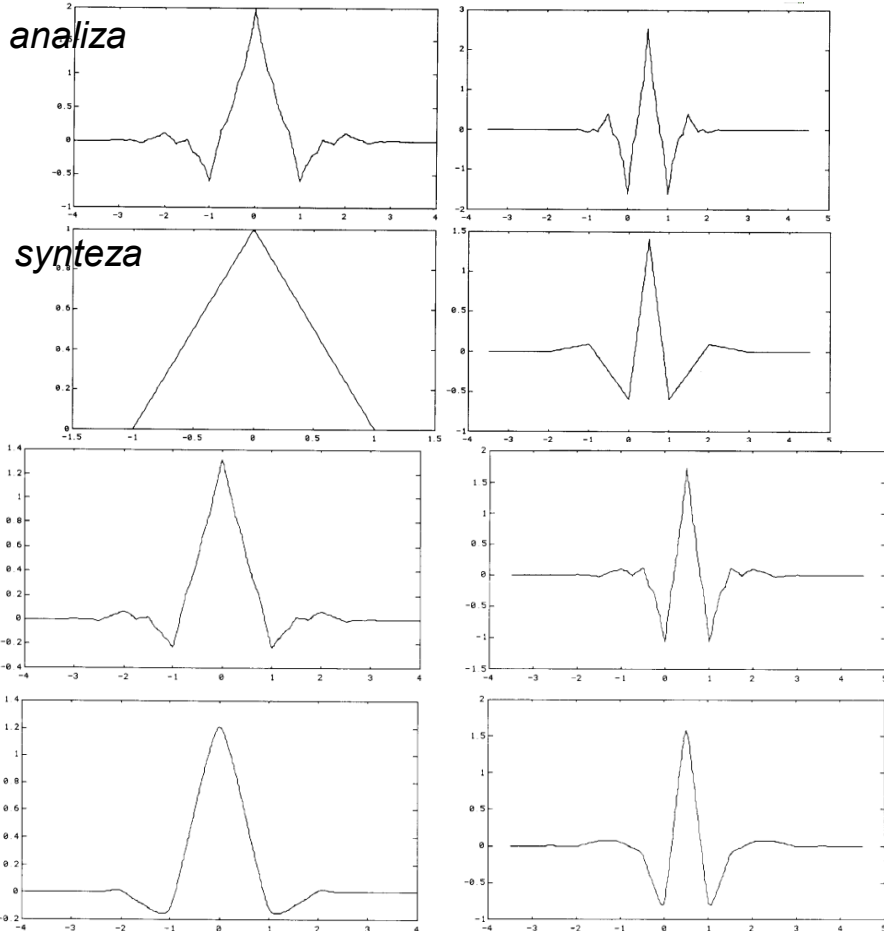
*konstrukcja funkcji skalującej,
ortogonalnej względem falek*

Rodzina falek sklejanych o zwartym nośniku

- Proste reguły generacji falek ze splajnow
- Optymalizacja falek (podstawowe równanie)

FILTER COEFFICIENTS FOR THE SPLINE FILTERS WITH $l = 3, k = 4, \bar{k} = 2$

n	0	± 1	± 2	± 3	± 4
$2^{-1/2}h_n$	45/64	19/64	-1/8	-3/64	3/128
$2^{-1/2}\tilde{h}_n$	1/2	1/4	0	0	0



FILTER COEFFICIENTS FOR EXAMPLE 3. THE ENTRIES ARE RATIONAL, AND THE TWO FILTERS ARE VERY CLOSE. THE h -FILTER COINCIDES WITH A LAPLACIAN PYRAMID FILTER PROPOSED IN [9]. IN THIS CASE $l = 2 = k, \bar{k} = 2$

n	0	± 1	± 2	± 3	± 4
$2^{-1/2}h_n$	0.6	0.25	-0.05	0	0
$2^{-1/2}\tilde{h}_n$	17/28	73/280	-3/56	-3/280	0

FILTER COEFFICIENTS FOR THE SPLINE VARIANT WITH LESS DISSIMILAR LENGTHS, WITH $l = 4 = k, \bar{k} = 4$

n	0	± 1	± 2	± 3	± 4
$2^{-1/2}h_n$	0.602 949	0.266 864	-0.078 223	-0.016 864	0.026 749
$2^{-1/2}\tilde{h}_n$	0.557 543	0.295 636	-0.028 772	-0.045 636	0

$$H(\xi)\tilde{H}(\xi) = \cos(\xi/2)^{2l} \left[\sum_{p=0}^{l-1} \binom{l-1+p}{p} \cdot \sin(\xi/2)^{2p} + \sin(\xi/2)^{2l} R(\xi) \right]$$

Kluczowe cechy falek

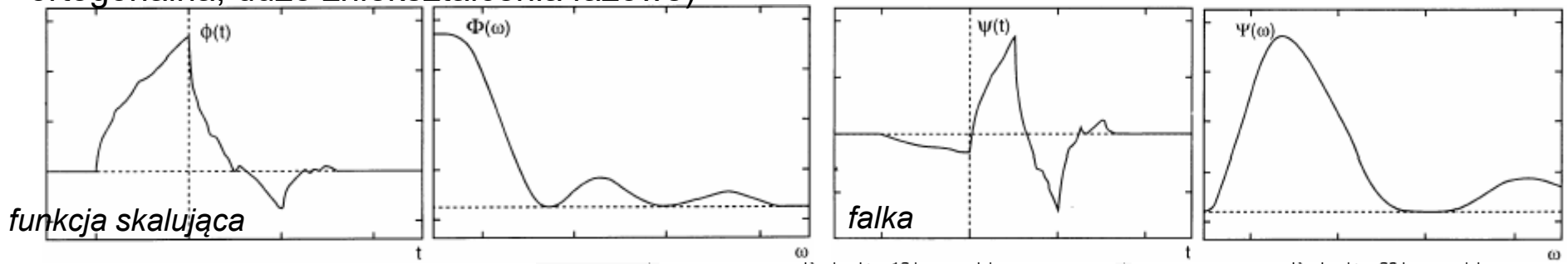
- Przykład falek sklejanych

Wavelet type	Orthogonality	Compact support	Key properties	Implementation
Orthogonal splines (Battle-Lemarié, Mallat)	Yes	No	• Symmetry & regularity + Orthogonality	IIR/IIR
Semi-orthogonal splines (B-splines) (Chui-Wang, Unser-Aldroubi)	Inter-scale	Analysis or Synthesis	• Symmetry & regularity + Optimal time-frequency localization	Recursive IIR/FIR
Shift-orthogonal splines (Unser-Thévenaz-Aldroubi)	Intra-scale	No	• Symmetry & regularity + Quasi-orthogonality + Fast decaying wavelet	IIR/IIR
Biorthogonal splines (Cohen-Daubechies-Feauveau)	No	Yes	• Symmetry & regularity + Compact support	FIR/FIR

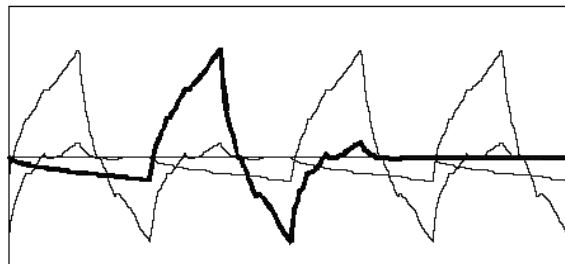
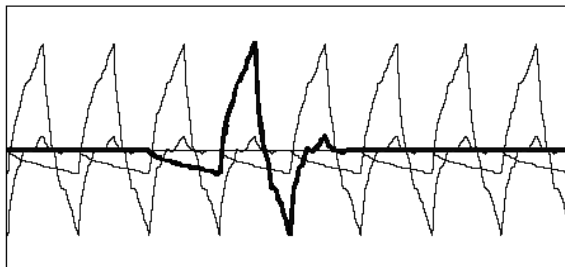
- Ortogonalność bazy
- Rozmiar nośnika (filtru sprzężonego) - zawarty lub nie (filtry SOI lub NOI)
- Regularność (ciągła pochodna rzędu k)
 - Liczba momentów znikających (*vanishing moments*): ψ ma p momentów znikających jeśli
$$\int t^l \psi(t) dt = 0 \quad \text{dla } l = 0, 1, \dots, p-1$$
- Symetria (anty) – liniowa faza filtrów falkowych

Falki Daubechies

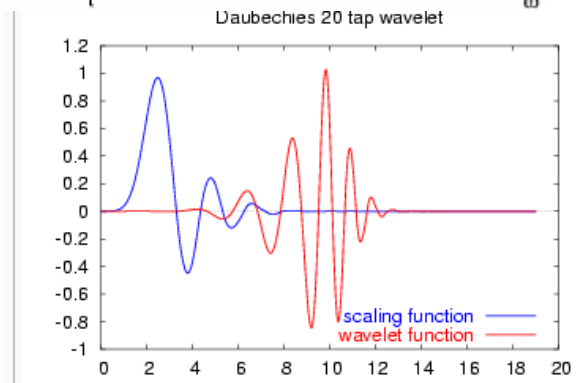
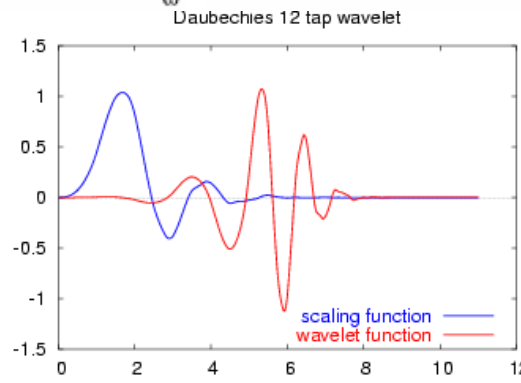
Falki Daubechies (maksymalna liczba momentów przy zadanym rozmiarze SOI, baza ortogonalna, duże zniekształcenia fazowe)



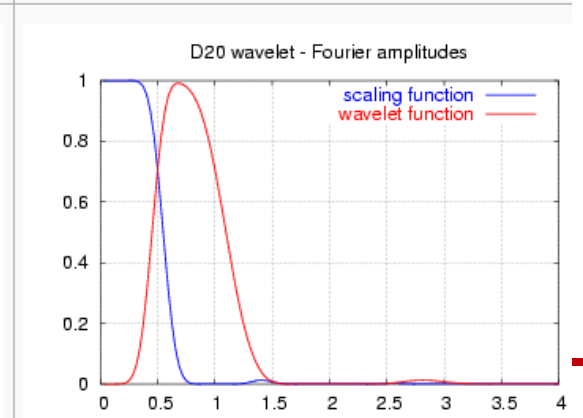
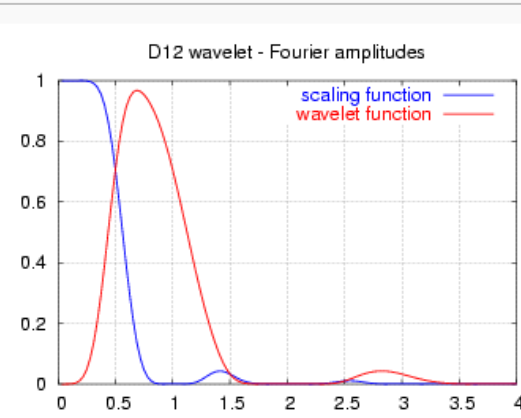
generacja bazy Daubechies (różne skale, przesunięcia)



scaling and wavelet functions

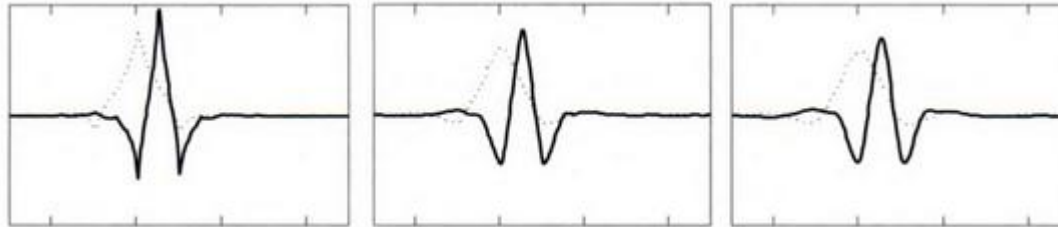
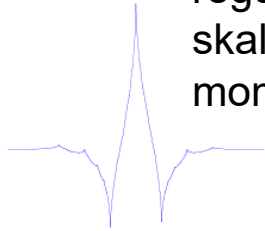


amplitudes of the frequency spectra of the above functions

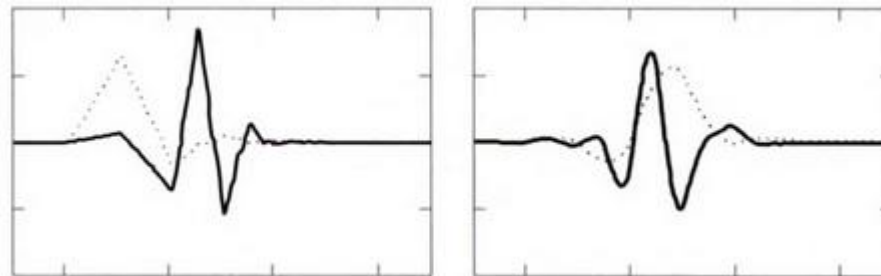


Inne rodziny falek regularnych, o lepszej fazie (Daubechies, zwarty nośnik)

- Coiflets (prawie liniowa faza - prawie symetryczne, regulacja liczbą momentów zanikających falki i f. skalującej) - falka $N_k/3$ momentów, f. skalująca $N_k/3-1$ momentów, nośnik N_k-1 przy długości filtru N_k



- Symmlets (minimum phase square root, asymmetric) - falka ma $N_k/2-1$ momentów, nośnik N_k-1 przy długości filtru N_k

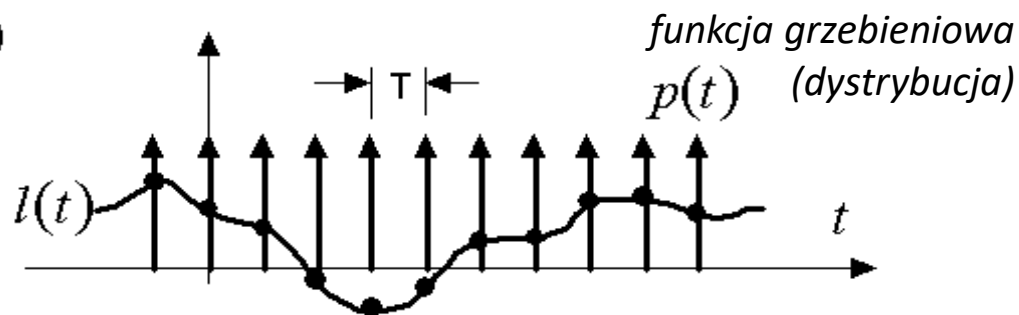
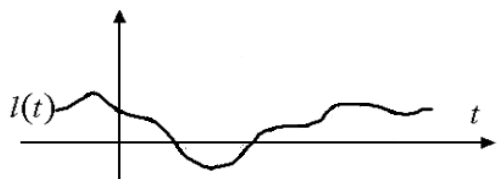
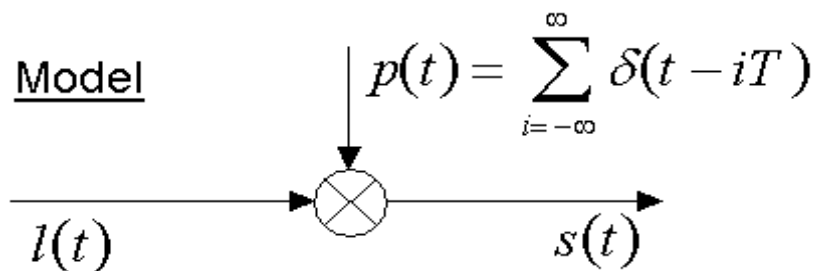
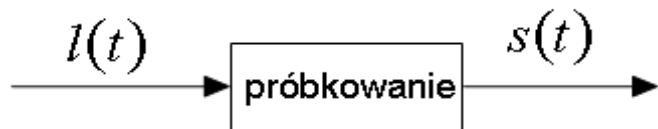


Coiflets coefficients					
k	C6	C12	C18	C24	C30
-10					-0.0002999290456692
-9					0.0005071055047161
-8				0.0012619224228619	0.0030805734519904
-7				-0.0023044502875399	-0.0058821563280714
-6			-0.0053648373418441	-0.0103890503269406	-0.0143282246988201
-5			0.0110062534156628	0.0227249229665297	0.0331043666129658
-4		0.0231751934774337	0.0331671209583407	0.0377344771391261	0.0398380343959866
-3		-0.0586402759669371	-0.0930155289574539	-0.1149284838038540	-0.1299967565094460
-2	-0.1028594569415370	-0.0952791806220162	-0.0864415271204239	-0.0793053059248983	-0.0736051069489375
-1	0.4778594569415370	0.5460420930695330	0.5730066705472950	0.5873348100322010	0.5961918029174380
0	1.2057189138830700	1.1493647877137300	1.1225705137406600	1.1062529100791000	1.0950165427080700
1	0.5442810861169260	0.5897343873912380	0.6059671435456480	0.6143146193357710	0.61940051151568410
2	-0.1028594569415370	-0.1081712141834230	-0.1015402815097780	-0.0942254750477914	-0.08773462296564723
3	-0.0221405430584631	-0.0840529609215432	-0.1163925015231710	-0.1360762293560410	-0.1492888402656790
4		0.0334888203265590	0.0488681886423339	0.0566272739169390	0.0583893855505615
5		0.0079357672259240	0.0224584819240757	0.0354716828454082	0.0462091445541337
6		-0.0025784067122813	-0.0127392020220977	-0.0215126323101745	-0.0279425853727641
7		-0.0010190107982153	-0.0036409178311325	-0.0080020216899011	-0.0129534995030117
8			0.0015804102019152	0.0053053298270610	0.0095622335982613
9			0.0006593303475864	0.0017911878563906	0.0034387669687710
10			-0.0001003855491065	-0.0008330003901883	-0.002349895888271
11			-0.0000489314885106	-0.0003676592334273	-0.0009016444801393
12				0.0000881604532320	0.0004268915950172
13				0.0000441656938246	0.0001984938227975
14				-0.0000046098383254	-0.0000582936877724
15				-0.0000025243583600	-0.0000300806359640
16					0.0000052336193200
17					0.0000029150058427
18					-0.0000002296399300
19					-0.0000001358212135

Reprezentacje cyfrowe

ZASADY AKWIZYCJI SYGNAŁÓW CYFROWYCH - PRÓBKOWANIE, KWANTYZACJA, KODOWANIE

PRÓBKOWANIE



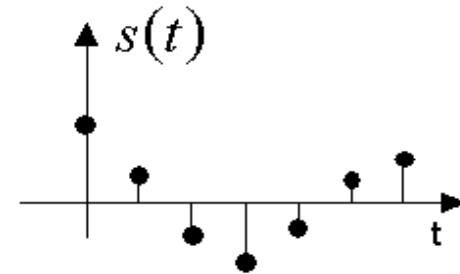
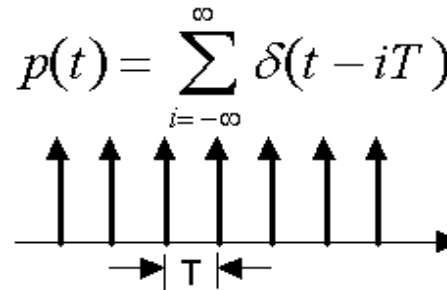
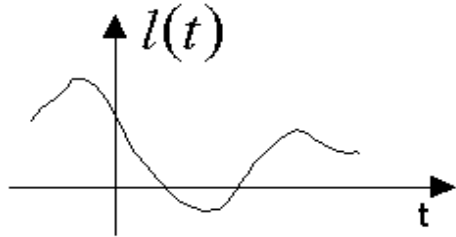
$$s(t) = l(t) \cdot \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} l(iT) \delta(t - iT)$$

szereg impulsów Diraca



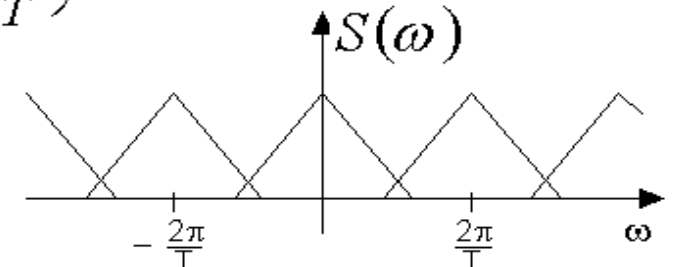
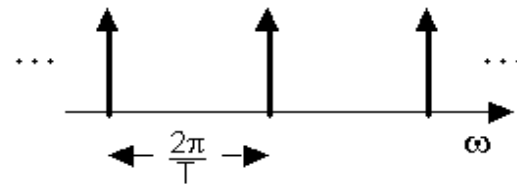
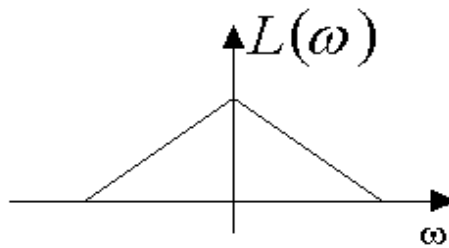
Próbkowanie 1W

w dziedzinie czasu



w dziedzinie częstotliwości

$$P(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - i\frac{2\pi}{T}\right)$$



sygnał ciągły

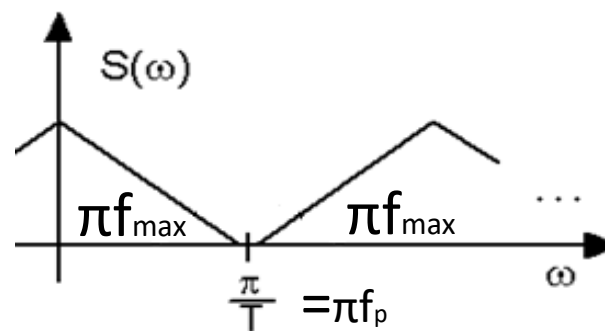
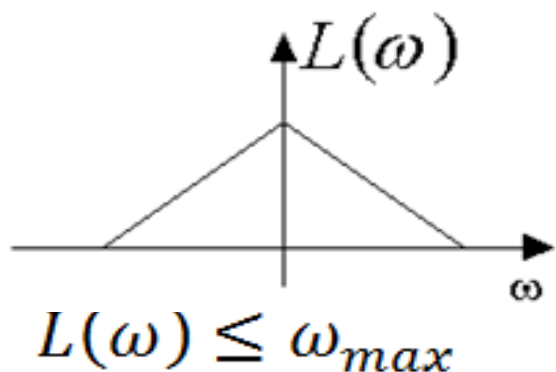
*funkcja
próbkująca*

*sygnał
spróbkowany*

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

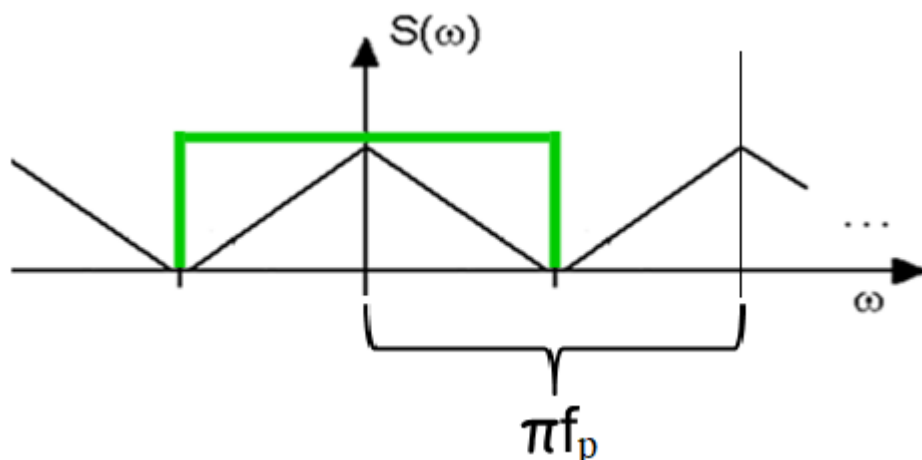
połączenie dziedziny czasu i częstotliwości, czyli transformacja Fouriera

Zasady próbkowania



$$\omega_{max} < \frac{\pi}{T} \rightarrow 2f_{max} < f_p = \frac{1}{T}$$

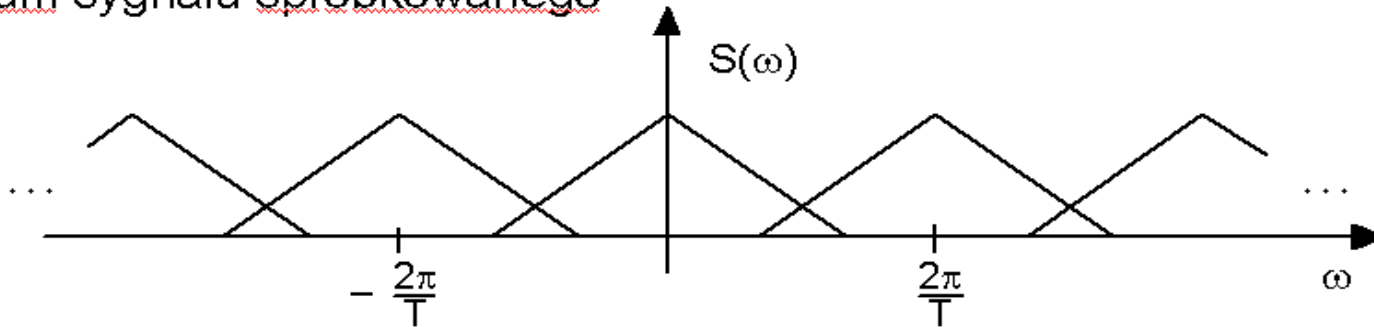
$$f_p > 2f_{max}$$



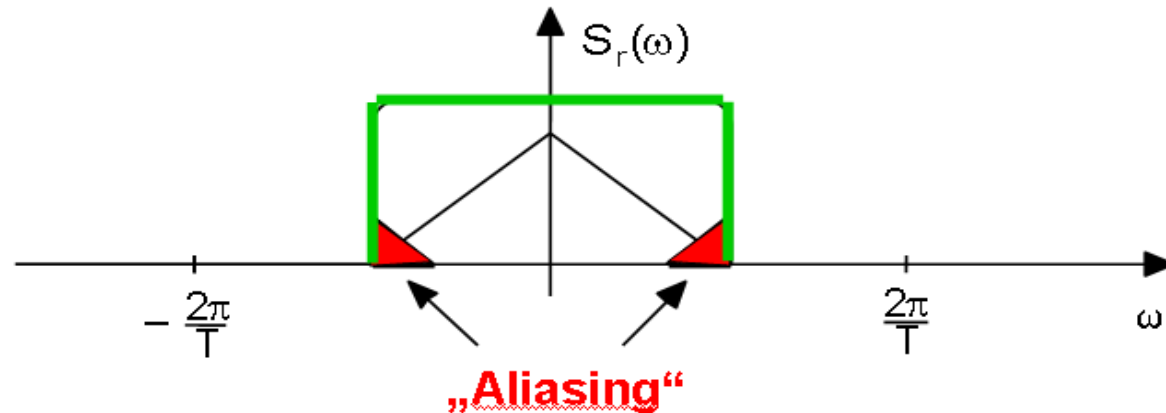
Jeśli sygnał jest próbkowany z wystarczającą częstością, tj. bez nakładania widm, to można go wiernie odtworzyć za pomocą filtracji liniowej, niezmienniczej względem przesunięcia.

Rekonstrukcja sygnału z próbek przy $f_p < 2f_{max}$

Spektrum sygnału spróbkowanego



Sygnał filtrowany (rekonstruowany, interpolowany)



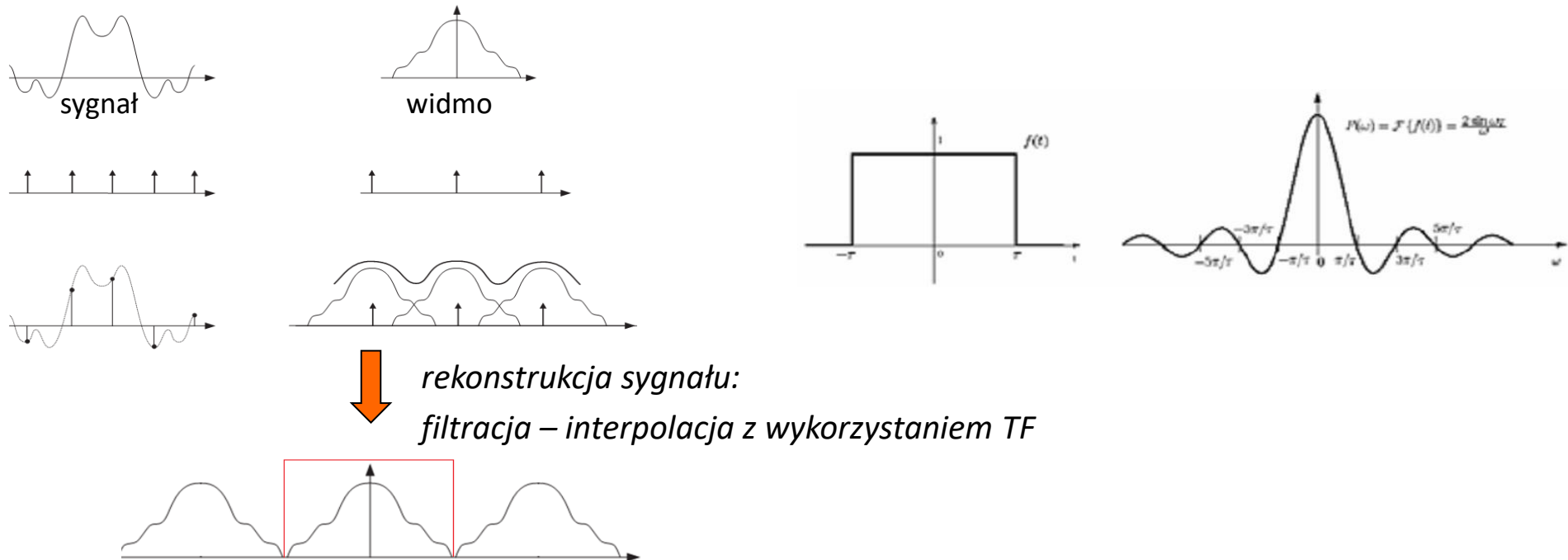
Liniowy, interpolacyjny opis sygnałów dyskretnych (dyskretne ale ciągłe)

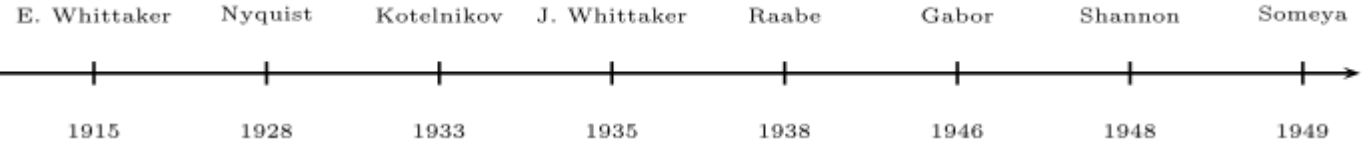
- Splot f z L (filtrem o odpowiedzi impulsowej h ograniczającym widmo)

$$h * f(t) = \int_{\mathbb{R}} h(u) f(t - u) du.$$

- Próbkowanie punktowe z interpolacją

$$f_d(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k\Delta t) \delta(t - k\Delta t) \Rightarrow \hat{f}_d(s) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f} \left(s - \frac{k}{\Delta t} \right)$$

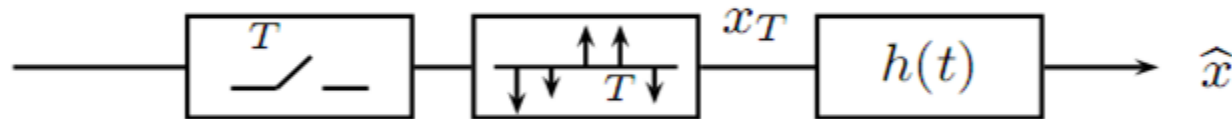




Twierdzenie o próbkowaniu sygnału z ograniczonym widmem

Twierdzenie o próbkowaniu Przyjmijmy że

- h jest idealnym filtrem dolnoprzepustowym w częstotliwość graniczną π/T i wzmocnieniu T , o odpowiedzi impulsowej $h(t) = \text{sinc}(\pi t/T)$ oraz TF postaci $H(\omega) = \begin{cases} T, & \text{dla } |\omega| \leq \pi/T \\ 0, & \text{wpp} \end{cases}$
- h jest filtrem interpolującym systemu próbkowania i interpolacji z okresem próbkowania T ,



- sygnał wejściowy tego systemu ma ograniczone pasmo (widmo) $f \in BL[-\Omega/2, \Omega/2]$.

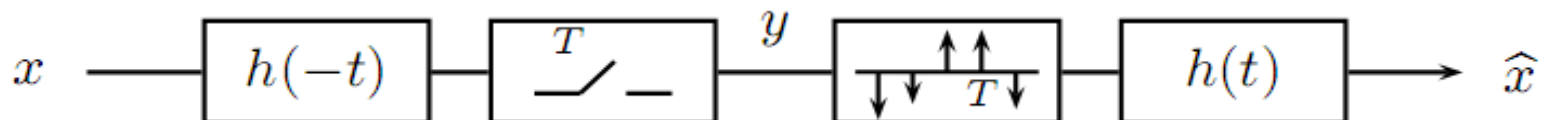
Jeśli zachodzi $\Omega < 2\pi/T$, wtedy interpolowany sygnał wyjściowy $\hat{f} = f$. Oznacza to, że ciąg próbek $\{f(nT)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest wystarczającą reprezentacją sygnału f , umożliwiającą doskonałą rekonstrukcję

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(nT) \text{sinc}(\pi(t/T - n))$$

Twierdzenie o aproksymacji ograniczonego widma

Twierdzenie o aproksymacji ograniczonego widma Niech Ω będzie dowolną liczbą dodatnią oraz niech sygnał f będzie dowolną funkcją w $L^2(\mathbb{R})$. Średniokwadratowa aproksymacja $f \in BL[-\Omega/2, \Omega/2]$ jest wyznaczana przez system próbkowania i interpolacji z dodatkowym filtrem $h(t) = \frac{1}{\sqrt{T}}\text{sinc}(\pi t/T)$ ograniczającym pasmo sygnału, gdzie okres próbkowania $T = 2\pi/\Omega$. Oznacza to, że ciąg próbek $\{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ jest wystarczającą reprezentacją przybliżającą sygnał \hat{f} według formuły

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{T}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} y_n \text{sinc}(\pi(t/T - n))$$



Rekonstrukcja sygnału źródłowego (ciągłego)

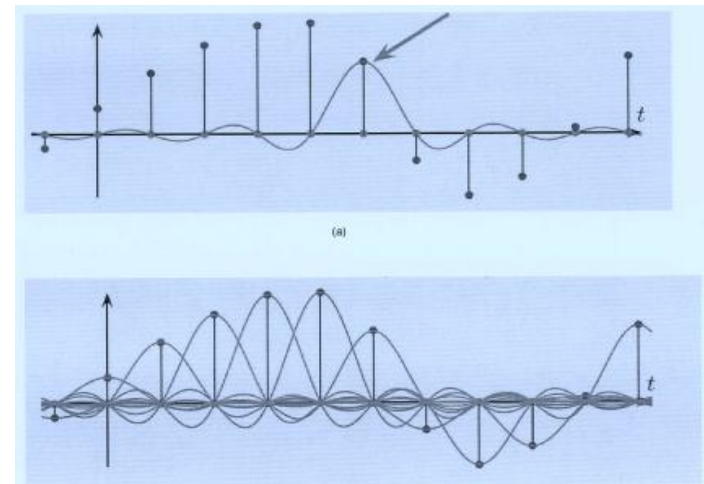
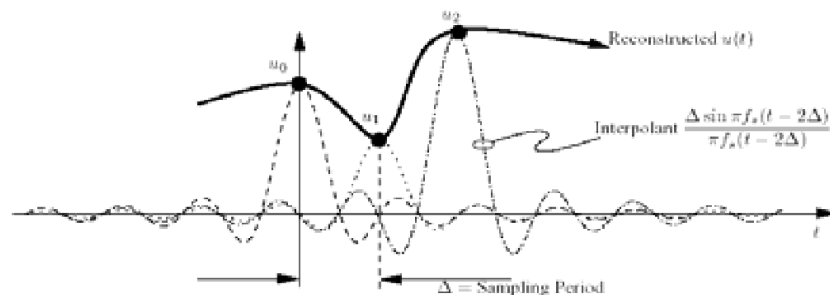
- Interpolacja odtwarza sygnał o ograniczonym widmie $\text{supp}(\hat{f}) \subset [-\Omega, \Omega]$

$$\Delta t \leq \Omega/2$$

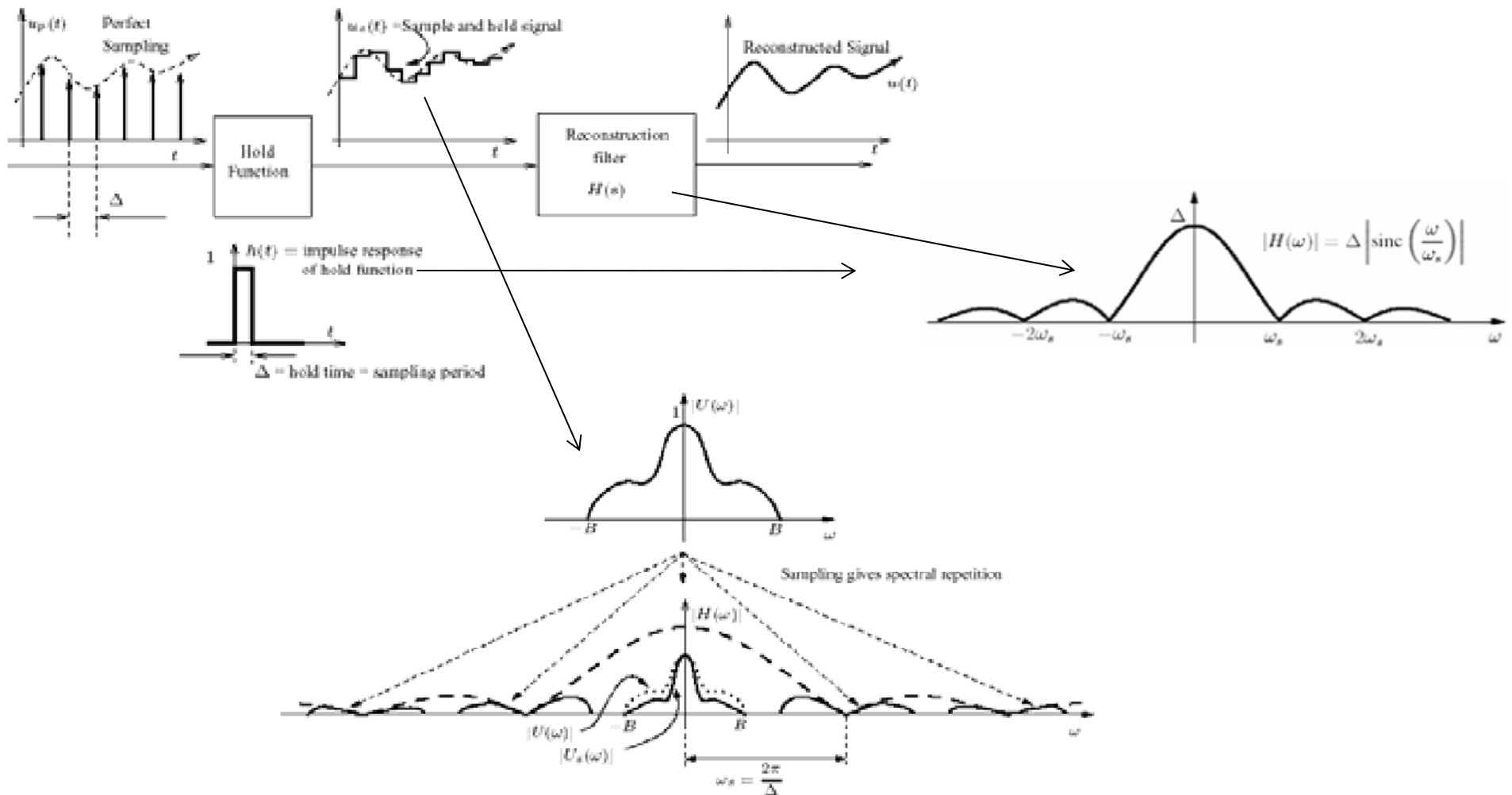
$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{k}{2\Omega}\right) \frac{\sin \pi(2\Omega t - k)}{\pi(2\Omega t - k)}$$

- Baza

$$e_{\Omega}(t) = \frac{\sin \pi 2\Omega t}{\pi 2\Omega t}$$

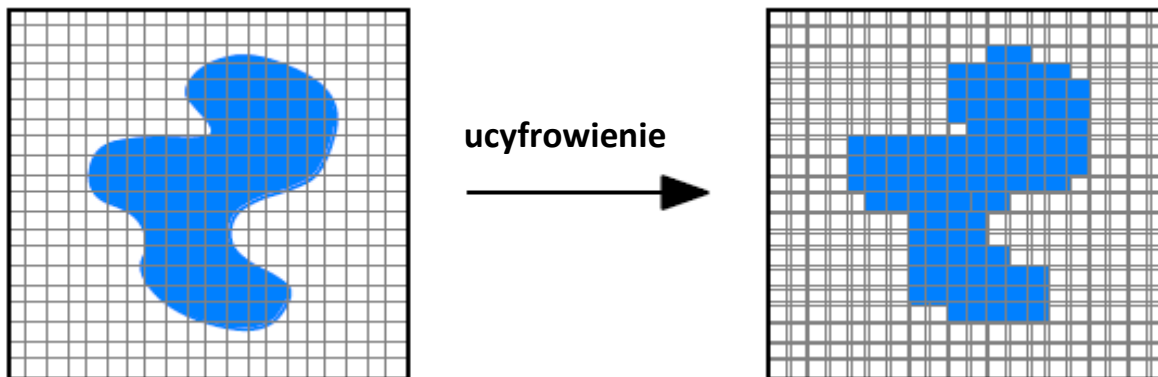
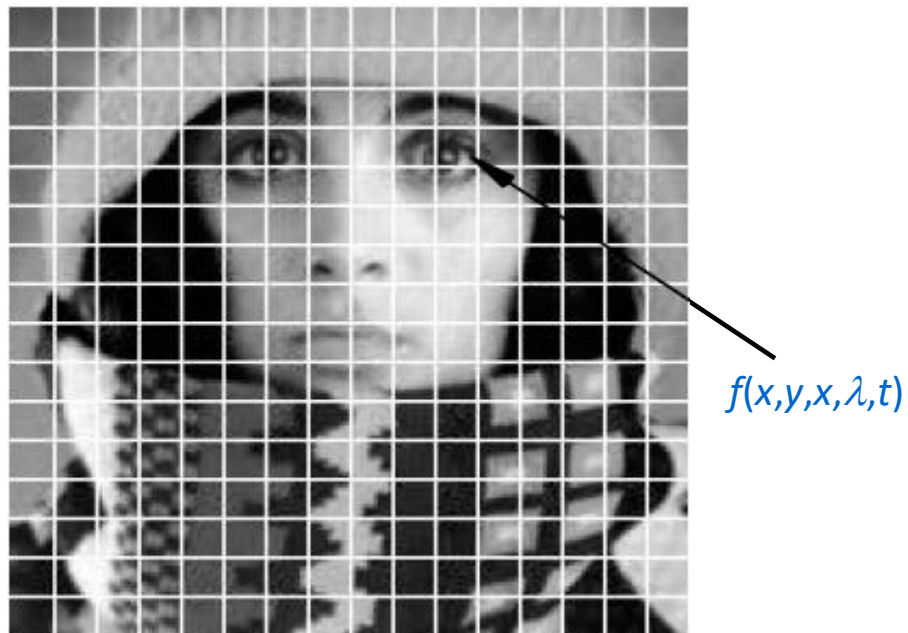


Bardziej rzeczywisty schemat próbkowania (zero-order hold)

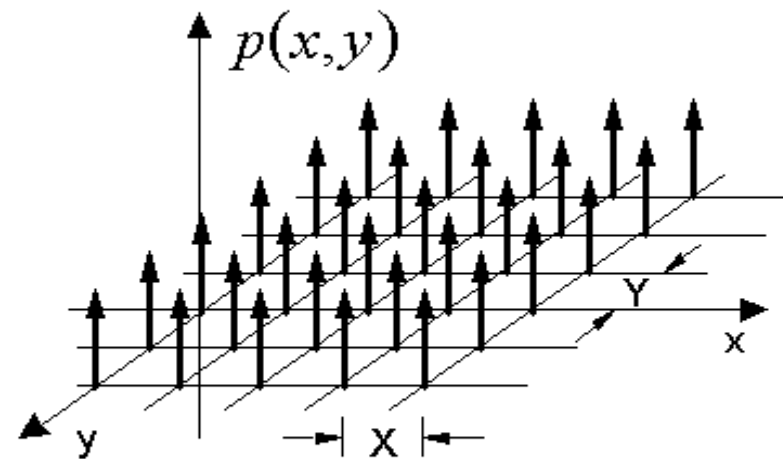
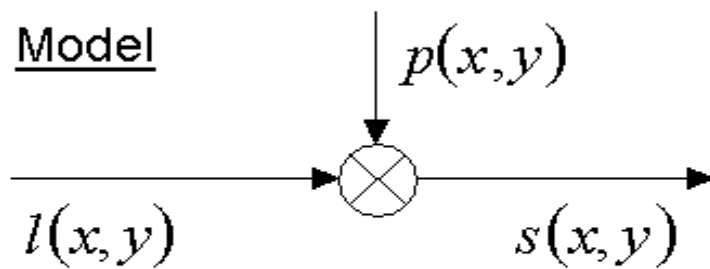


Ucyfrowienie obrazów

- Przetwarzanie a/c
- Detektory cyfrowe



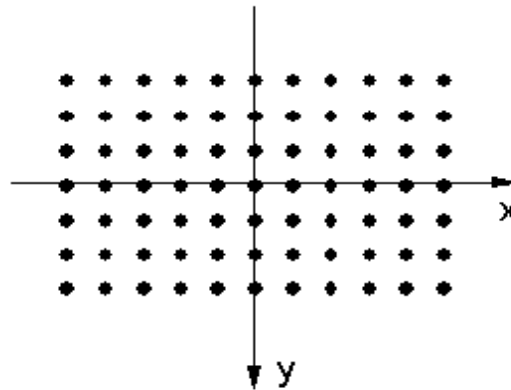
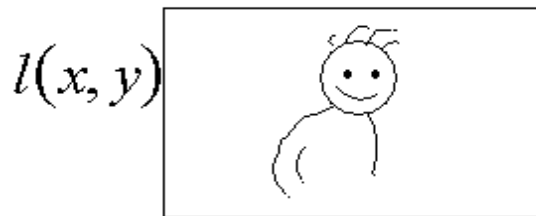
Próbkowanie 2W



$$p(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_2(x - mX, y - nY)$$

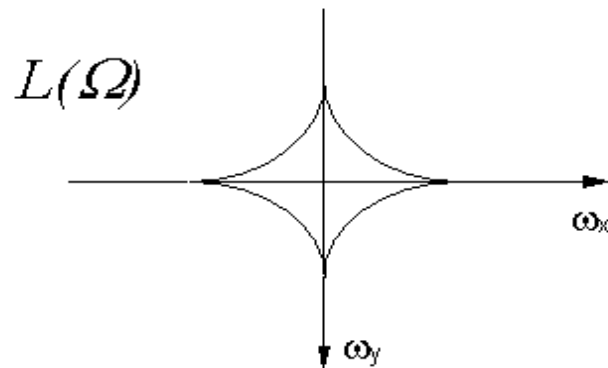
Próbkowanie 2W

w dziedzinie czasu

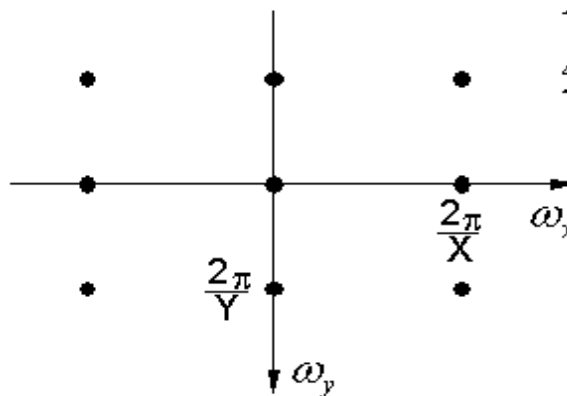


$$p(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_2(x - mX, y - nY)$$

w dziedzinie częstotliwości

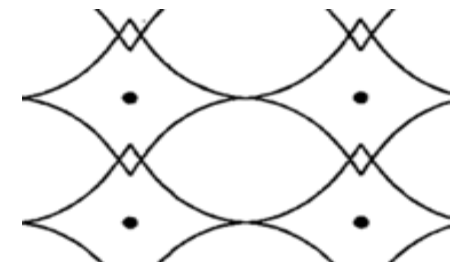


sygnał ciągły



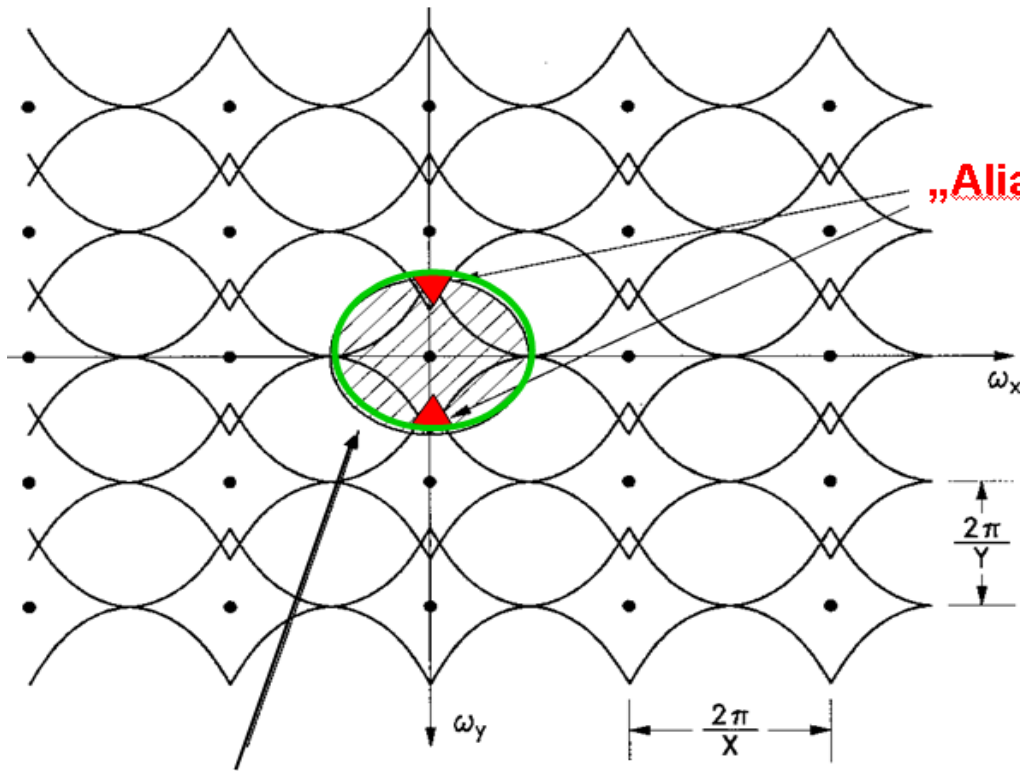
funkcja próbkująca

$$P(\omega_x, \omega_y) = \frac{4\pi^2}{XY} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta_2\left(\omega_x - m\frac{2\pi}{X}, \omega_y - n\frac{2\pi}{Y}\right)$$

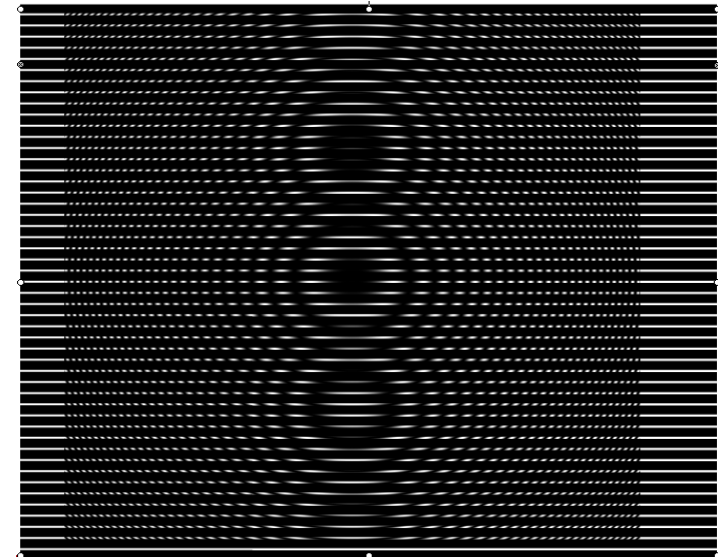
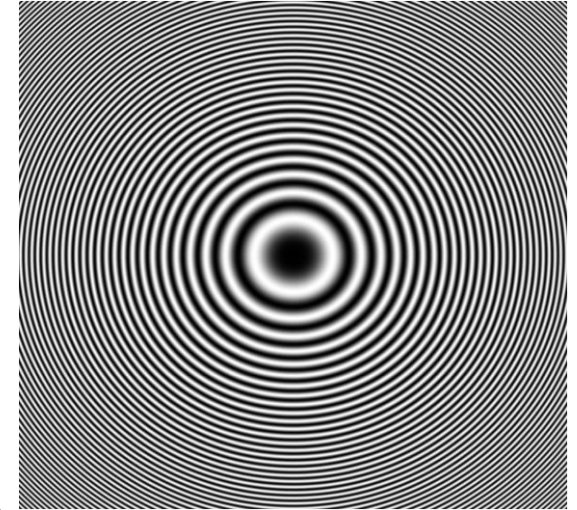


Problemy rekonstrukcji

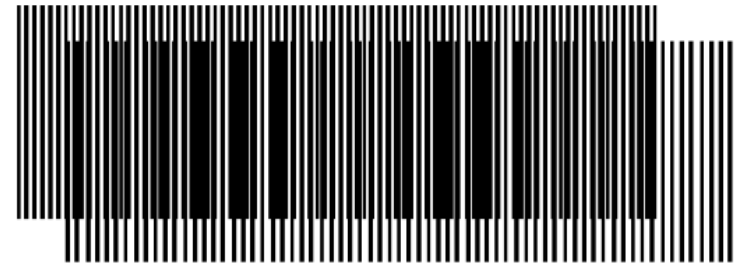
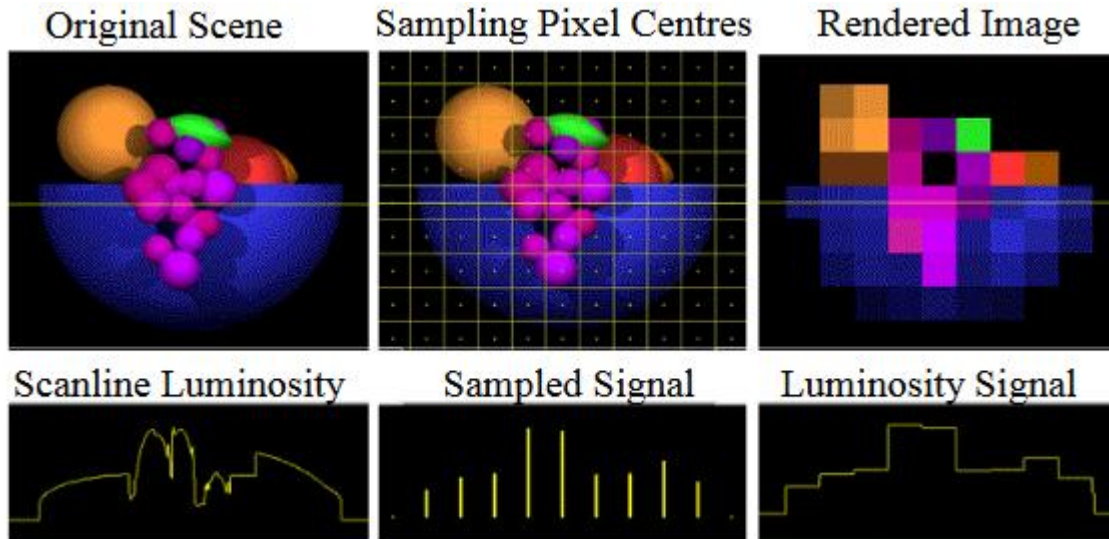
Nakładanie widm w dziedzinie częstotliwości



Filtr rekonstrukcji (interpolujący)

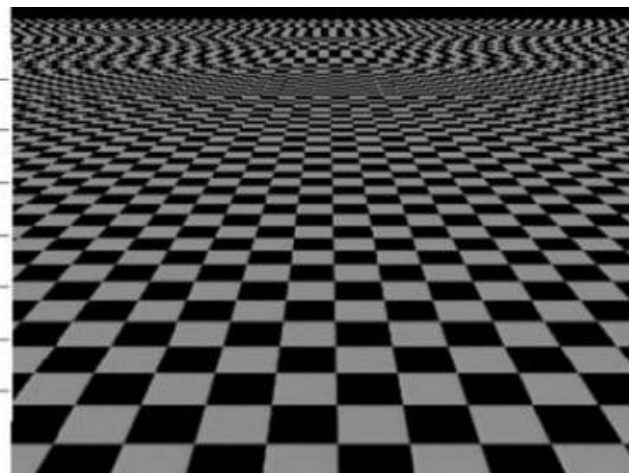
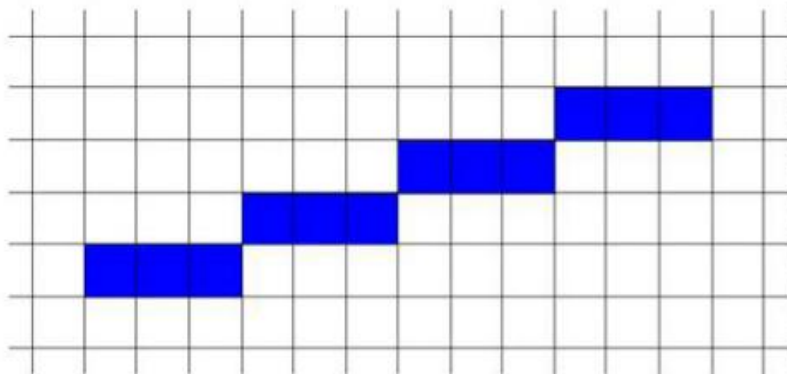


Niechciane efekty: uśrednianie, ...

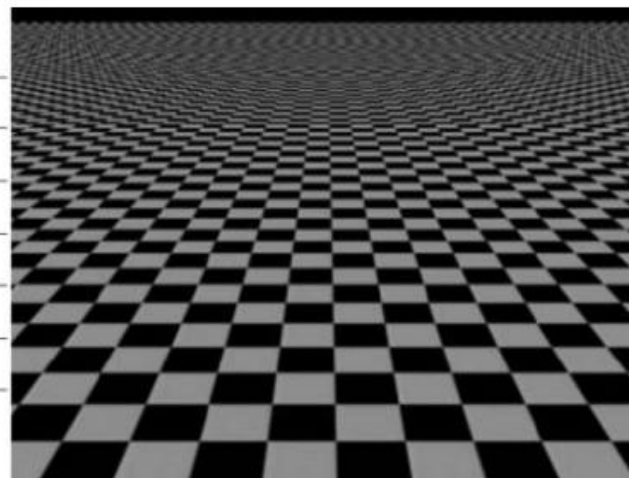
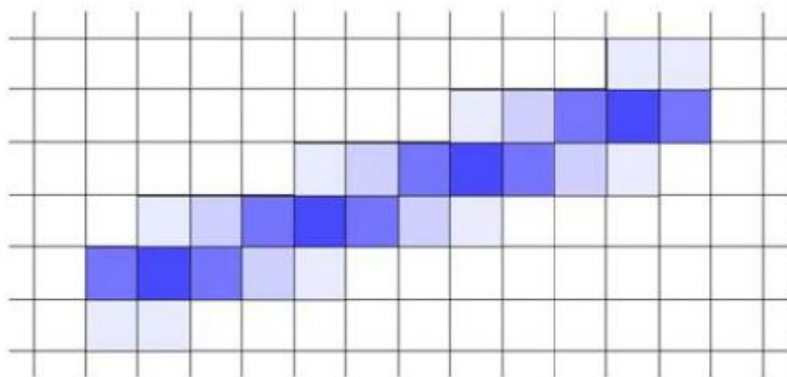


- Schodki, gubienie detali, efekt mory

Antyaliasing w grafice komputerowej



Rozmycie ostrych krawędzi poprawia widziany efekt



KWANTYZACJA, czyli

- Kwantyzacja to odwzorowanie wejściowego zbioru wartości rzeczywistych (o nieskończonej, dużej precyzji) z określonego zakresu (reprezentujących sygnał ciągły o określonej, skończonej dynamice) w skończony (niewielki, mały) zbiór wartości całkowitych, słów kodowych lub wartości o skończonej, zdecydowanej mniejszej precyzji
- Schemat kwantyzacji charakteryzują: zbiór przedziałów kwantyzacji oraz zbiór wartości ich reprezentantów (skwantowanych, rekonstrukcji, przybliżających itp.)
- Mamy:

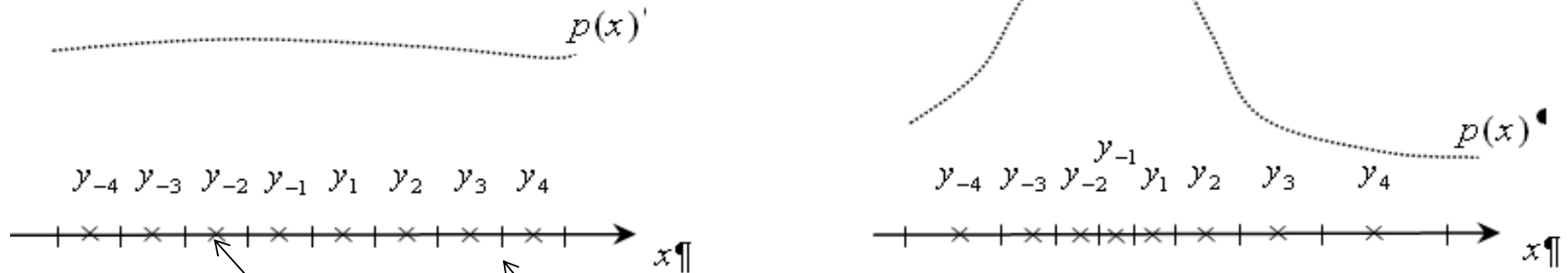
$$\text{We: } X = \{x_i\}_{i=1}^K \quad \text{Wy: } \tilde{X} = \{\tilde{x}_i\}_{i=1}^K$$

$$\text{Kwantyzacja: } Q: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \text{ tak że } Q(x_i) = \tilde{x}_i \text{ z błędem: } D_Q = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (x_i - \tilde{x}_i)^2$$

przy czym $\tilde{x}_i = y_j$ jeśli $x_i \in [\beta_{j-1}, \beta_j)$, a $\{\beta_j\}_{j=0}^M$ jest zbiorem punktów

granicznych przedziałów kwantyzacji z punktami rekonstrukcji $\{y_j\}_{j=1}^M$

Kwantyzacja nierównomierna - sterowana estymatą funkcji gęstości prawdopodobieństwa

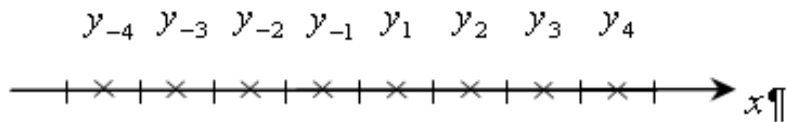
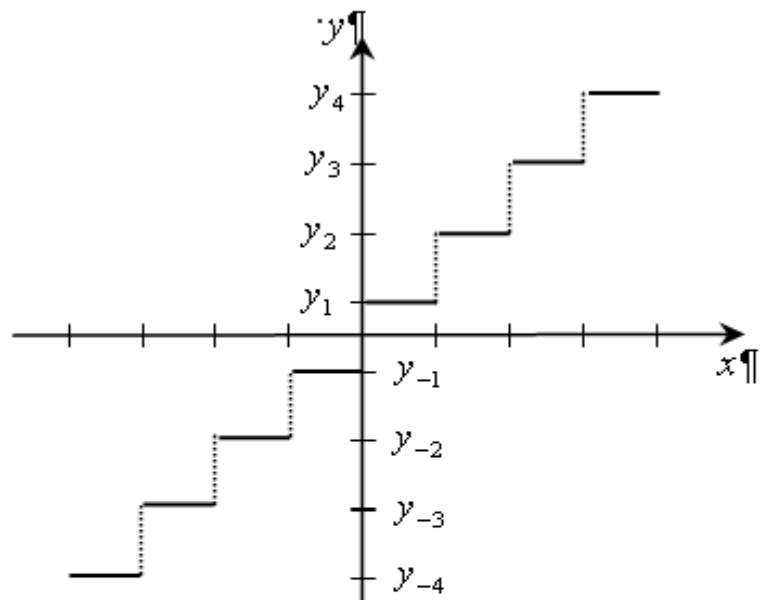


- Metoda Lloyd-Maxa (iteracyjna, zbieżna do lokalnego optimum, duży wpływ inicjalizacji, czasochłonna)
- Obowiązujące zasady centroidu i najbliższego sąsiada

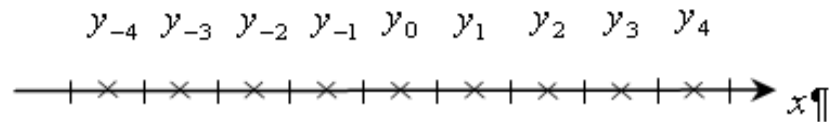
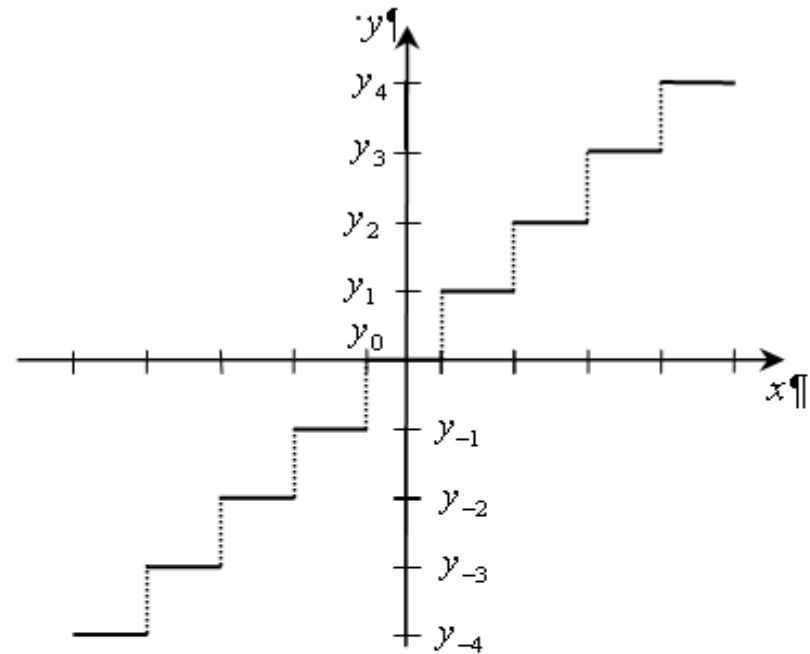
$$y_j = \frac{\int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} x f_X(x) dx}{\int_{\beta_{j-1}}^{\beta_j} f_X(x) dx}$$

$$\beta_j = \frac{y_j + y_{j+1}}{2}$$

Kwantyzacja równomierna (bez wiedzy a priori)



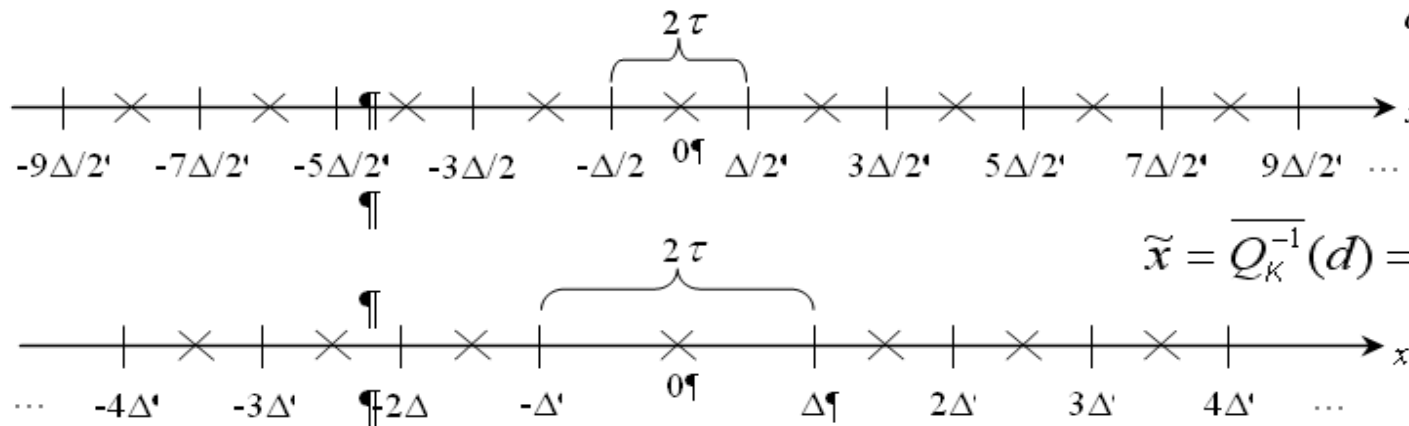
bez zera



z zerem

Kwantyzatory prawie równomierne, adaptacyjne

- Z regulowanym przedziałem zerowym



$$d = Q_k(x) = \text{znak}(x) \left\lfloor \frac{|x| + 0.5\Delta}{\Delta} \right\rfloor$$

$-0,5 \leq \delta < 0,5$

$$\tilde{x} = Q_k^{-1}(d) = \begin{cases} 0, & d = 0 \\ \text{znak}(d)(|d| + \delta)\Delta, & d \neq 0 \end{cases}$$

$0 \leq \delta < 1$

$$d = \text{znak}(x) \left\lfloor \frac{|x|}{\Delta} \right\rfloor$$

uogólniając

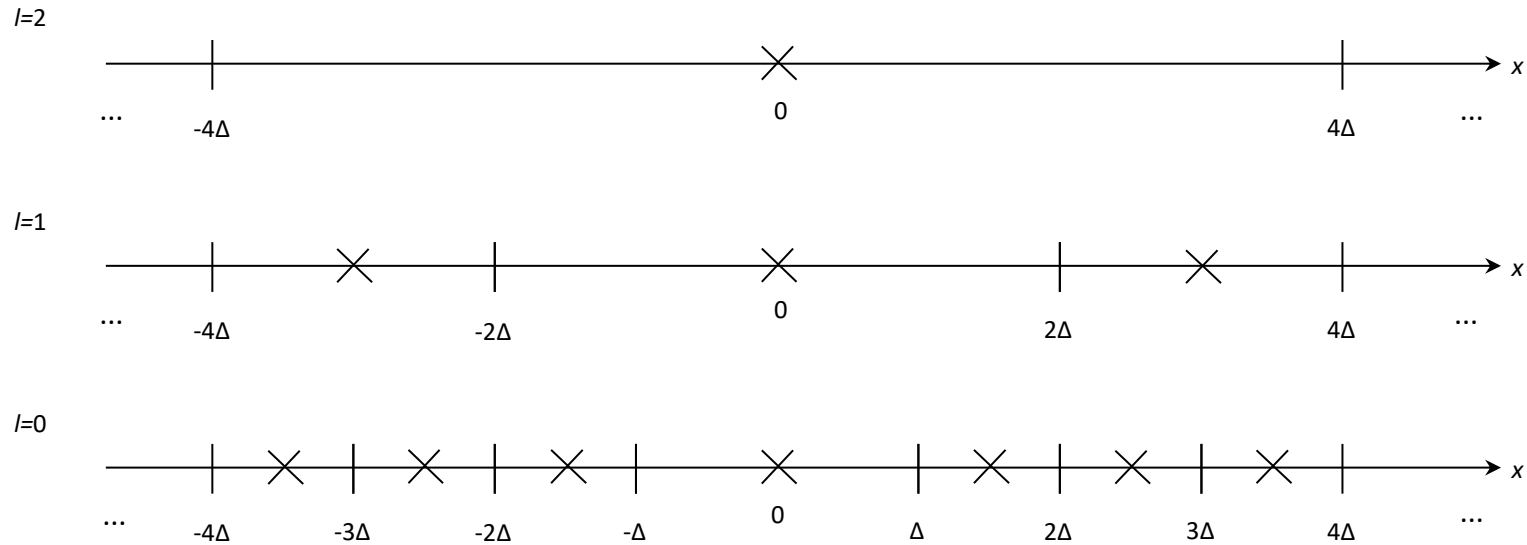
$$d = \begin{cases} 0, & |x| < -k\Delta \\ \text{znak}(x) \left\lfloor \frac{|x| + k\Delta}{\Delta} \right\rfloor, & |x| \geq -k\Delta \end{cases}$$

$$\tilde{x} = \begin{cases} 0, & d = 0 \\ \text{znak}(d)(|d| - k + \delta)\Delta, & d \neq 0 \end{cases}$$

szerokość przedziału zerowego $2(1-k)\Delta$, gdzie $k \in (-1, 1)$

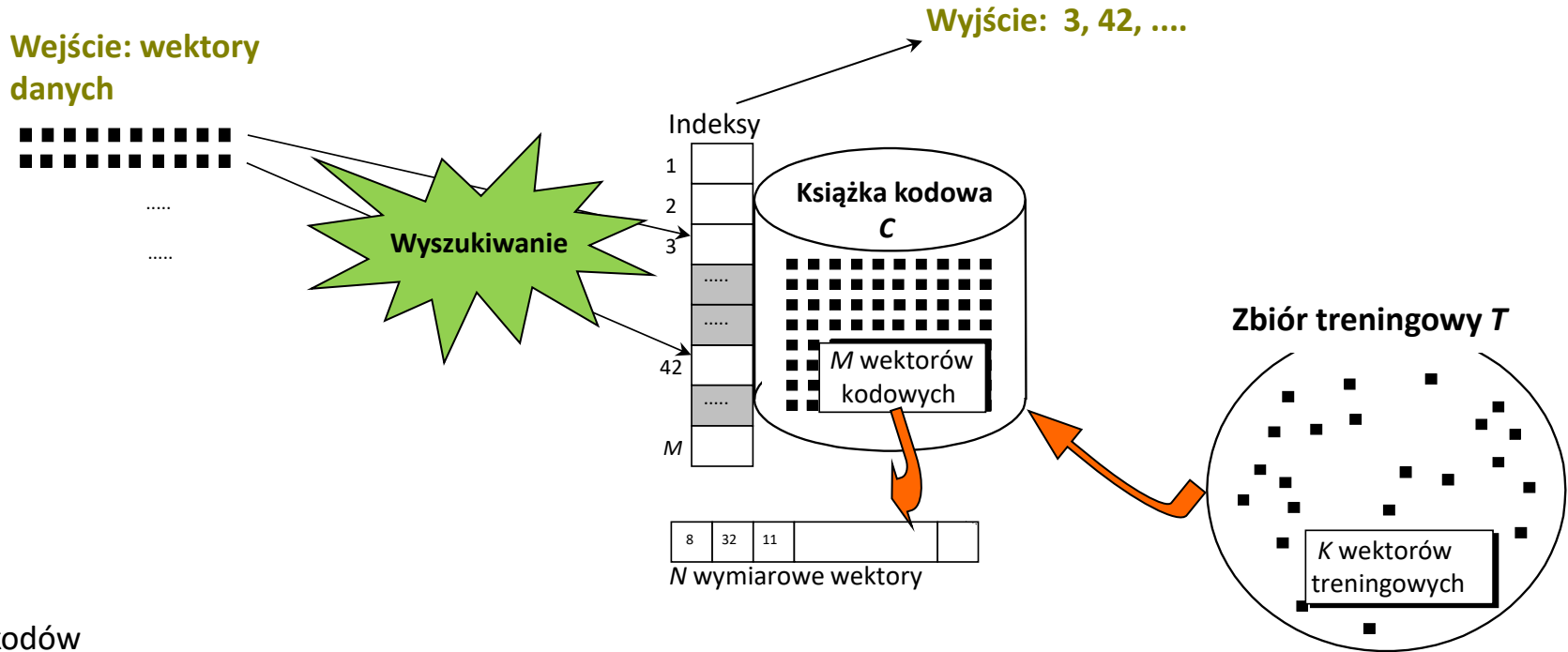
Uproszczone kwantyzatory

- Sukcesywna aproksymacja (progowanie lub dostawianie bitów)



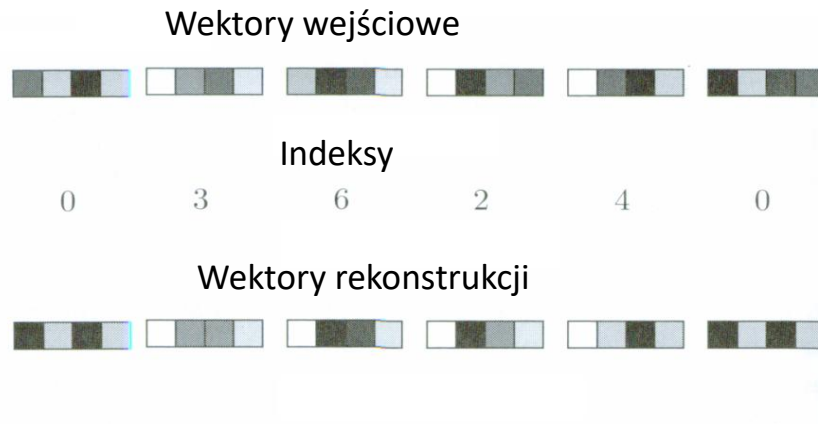
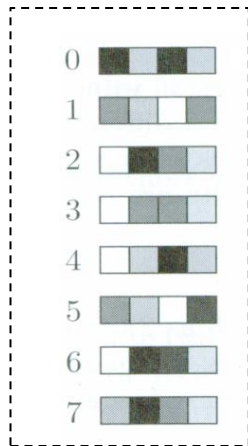
Wektorowa kwantyzacja

koncepcja

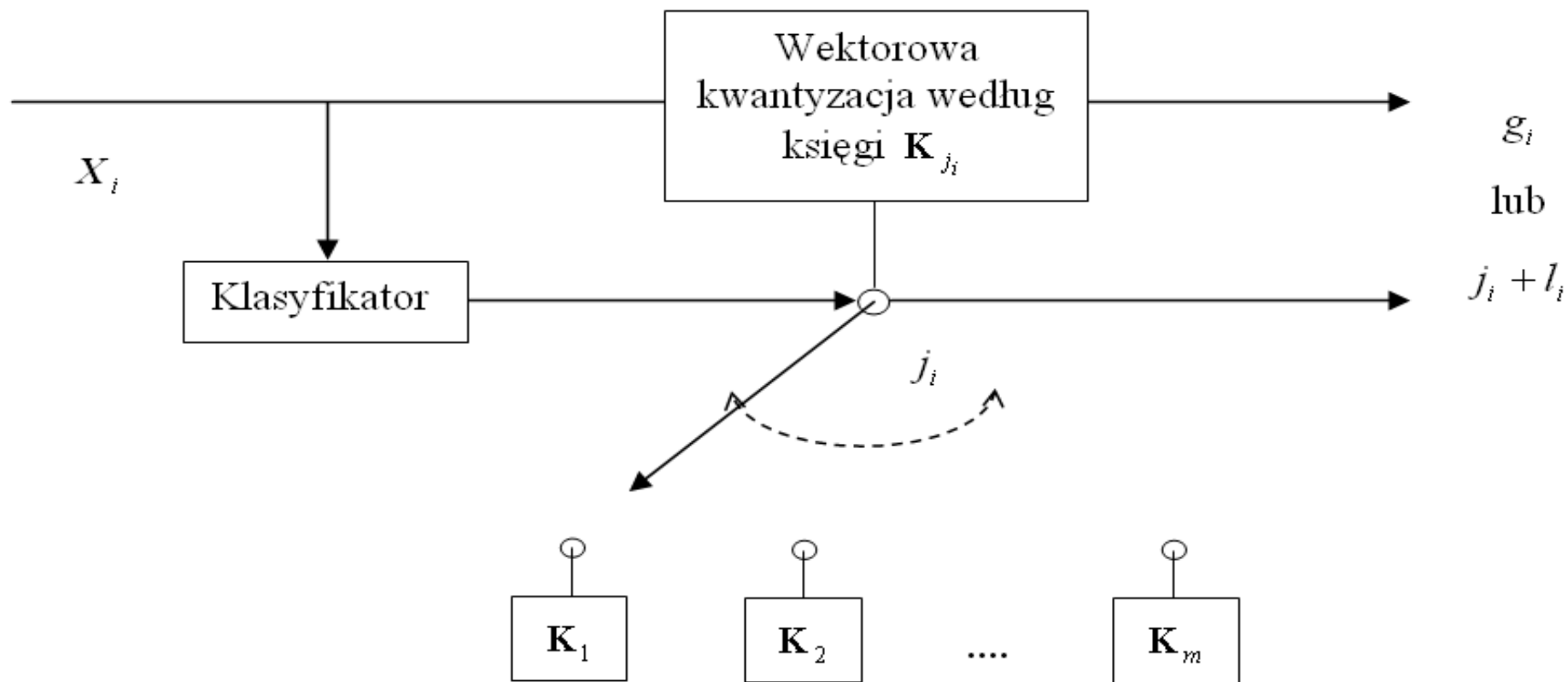


przykład

Książka kodów



VQ z klasyfikacją



VQ z pamięcią – wybór kwantyzatora zależy od przeszłości

