

## **Labolatorium PTI – ćwiczenie 1, przykład 2**

Reprezentacja i przetwarzanie sygnałów

Wpływ wybranej bazy falkowej na efekt  
dekompozycji i rekonstrukcji w oparciu o CWT

# 1 Wstęp

Niniejsza praca stanowi kontynuację prac przedstawionych w raporcie z laboratoriów 3.

Metody oparte o dekompozycję i rekonstrukcję wieloskalową stały się bardzo popularne w ostatnich kilku dekadach. Szczególnie istotnym obszarem badań w tej dziedzinie jest analiza falkowa, która zyskała dużą popularność w latach 90.

Przykładem zastosowania analizy dekompozycji i rekonstrukcji sygnału w oparciu o analizę falkową jest użycie Dykretnej Analizy Falkowej (DWT) w formacie JPEG2000. Zastosowanie analizy falkowej w kompresji prowadzi do uzyskania dobrych rezultatów natomiast brak właściwości niezależności translacji (translation-invariance) prowadzi do powstania dużej ilości artefaktów po niewielkiej zmianie komponentów falkowych. Ten problem nie występuje jednak w przypadku użycia ciągłej transformacji falkowej (CWT).

W niniejszej pracy przedstawiony został wpływ użytych banków filtracji użytej w dekompozycji i efektów widocznych w błędzie rekonstrukcji. Do tego celu została użyta ciągła dekompozycja falkowa (CWT) oraz bazowa falka Morleta.

## 2 Metody

### 2.1 Analiza falkowa

$$F_\alpha = \frac{F_c}{\alpha\Delta} \quad (1)$$

Funkcja 1 zamiany oczekiwanych pseudo-częstotliwości falki na skale analizy falkowej, gdzie:  $\alpha$  jest skalą,  $\Delta$  oznacza okres próbkowania,  $F_c$  środkowa częstotliwość falki,  $F_\alpha$  pseudo częstotliwość odpowiadająca skali  $\alpha$ .

### 2.2 Zamiana częstotliwości na skale

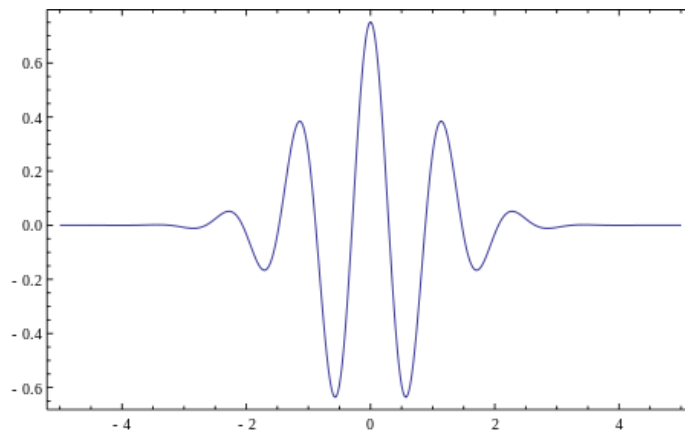
W celu zamiany pseudo-częstotliwości na skale została napisana funkcja zamieniająca pseudo-częstotliwości falki bazowej na oczekiwane skale. W tym celu został zastosowany wzór 1 oraz funkcja MATLAB `centfrq()` pozwalająca na określenie centralnej częstotliwości falki.

```
function [ scales ] = freq2scale( frequencies,wname,delta )
    c_f = centfrq(wname); %Wavelet center frequency
    scales = c_f ./ (delta .* frequencies);
end
```

### 2.3 Falka bazowa

W analizie została użyta Falka morleta. Jest ona efektem pomnożenia funkcji eulera przez funkcję gaussa. Falka morleta zwana jest także falką gabora i została przedstawiona na wykresie 1. Falka morleta znajduje swoje zastosowania w medycynie (np. w analizach ECG w celu odkrywania nieprawidłowości) a także w muzyce (np. w transkrypcji).

Rysunek 1: Wykres falki morleta

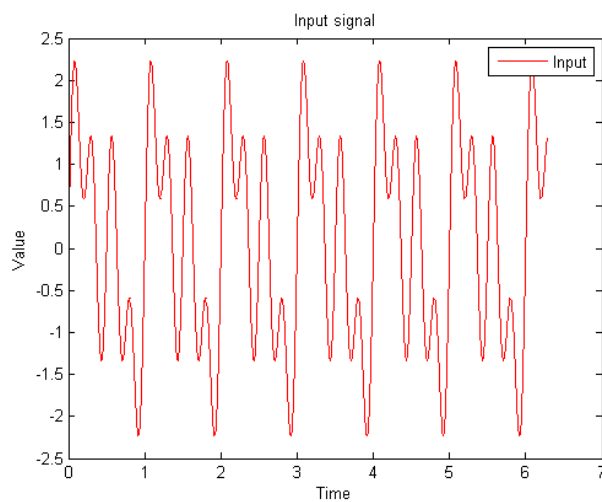


## 2.4 Sygnał wejściowy

$$y(t) = \sin(2\pi t) + \sin(4\pi t) + \sin(8\pi t) \quad (2)$$

Sygnał wejściowy 2, suma trzech funkcji sinus o różnych częstotliwościach (1, 2 i 4 Hz). Sygnał wejściowy bazuje na sumie funkcji sin ze względu na to, że odpowiada to falce bazowej, która oparta jest o wzór eulera.

Rysunek 2: Wykres sygnału wejściowego

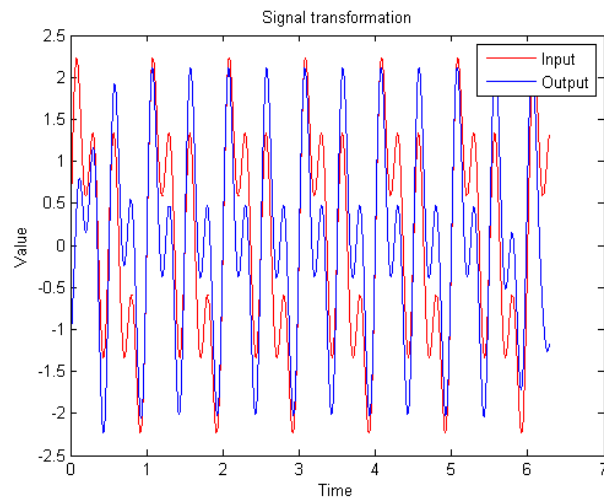


### 3 Wyniki

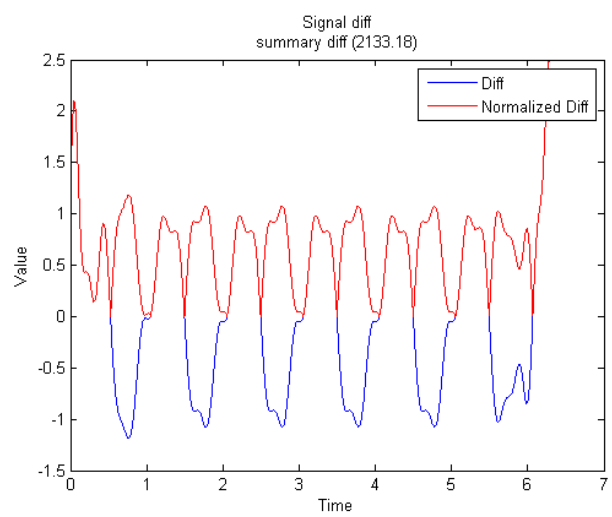
#### 3.1 Rekonstrukcja na podstawie CWT - 2 skale

Wykres 3 przedstawiają wynik rekonstrukcji sygnału wejściowego 2 na podstawie analizy falkowej z użyciem dwóch pseudo-częstotliwości - 4 i 2 Hz odpowiadającym składowym sygnału wejściowego. Częstotliwości zostały zmapowane na skale o wartości 101,5625 203,125. Wykres 4 przedstawia błąd rekonstrukcji, osiągający sumaryczną wartość 2133.18.

Rysunek 3: Wykres rekonstrukcji sygnału wejściowego na podstawie 2 częstotliwości



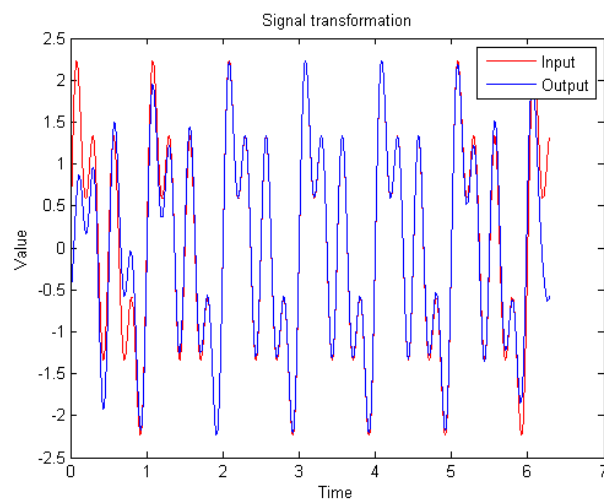
Rysunek 4: Wykres błędu rekonstrukcji sygnału wejściowego na podstawie 2 częstotliwości



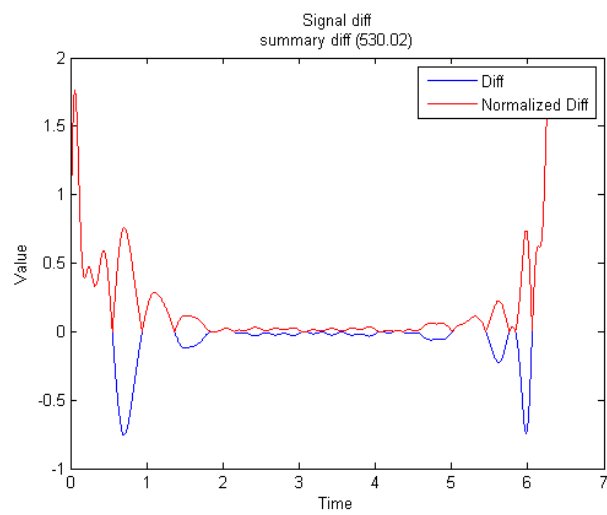
### 3.2 Rekonstrukcja na podstawie CWT - 3 skale

Wykres 5 przedstawiają wynik rekonstrukcji sygnału wejściowego 2 na podstawie analizy falkowej z użyciem trzech pseudo-częstotliwości - 4, 2 i 1 Hz odpowiadającym składowym sygnału wejściowego. Częstotliwości zostały zmapowane na skale o wartości 101,5625 203,125 i 406,25. Wykres 6 przedstawia błąd rekonstrukcji, osiągający sumaryczną wartość 530.02. Wykres 7 przedstawia wynik analizy falkowej sygnału dla 3 częstotliwości.

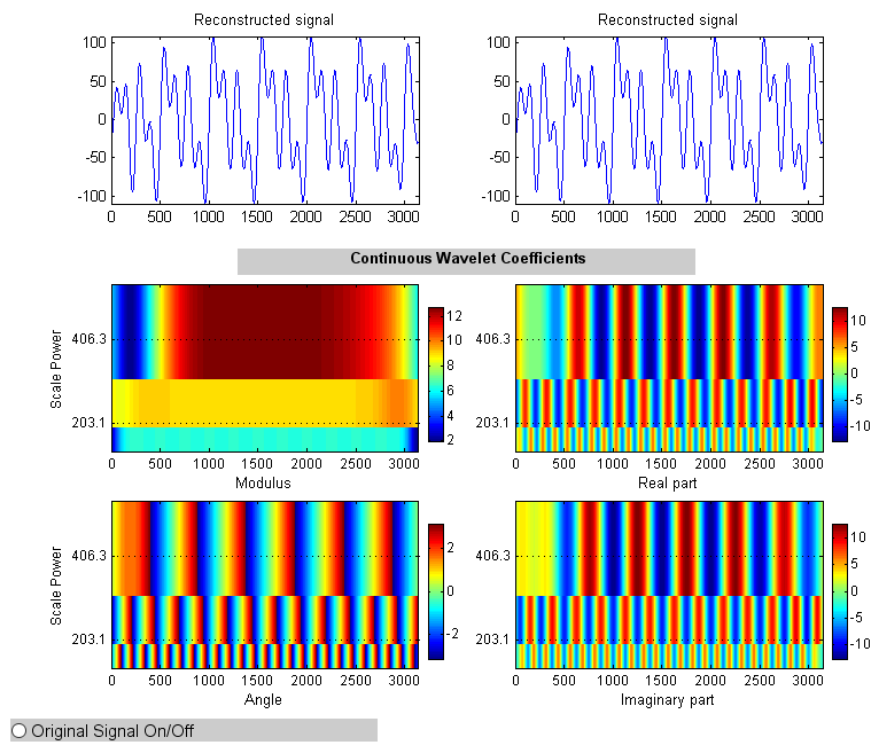
Rysunek 5: Wykres rekonstrukcji sygnału wejściowego na podstawie 3 częstotliwości



Rysunek 6: Wykres błędu rekonstrukcji sygnału wejściowego na podstawie 3 częstotliwości



Rysunek 7: Skalogramy analizy falkowej sygnału wejściowego na podstawie 3 częstotliwości

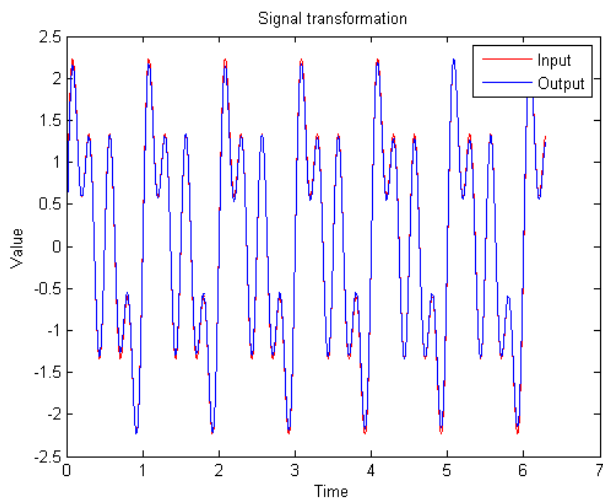


### 3.3 Rekonstrukcja na podstawie CWT - 24 skali

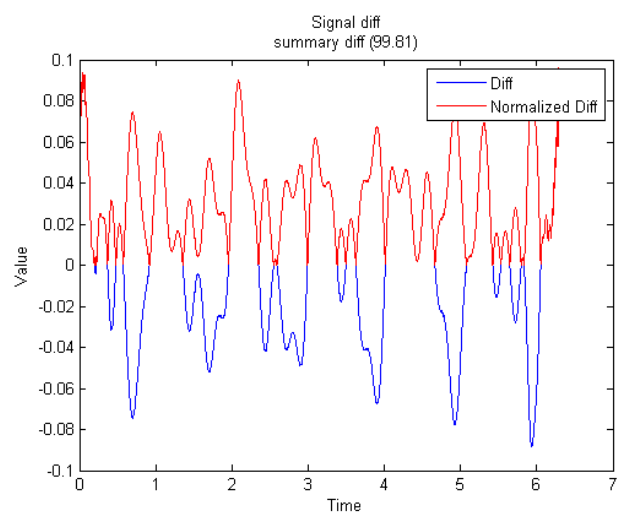
Wykres 5 przedstawiają wynik rekonstrukcji sygnału wejściowego 2 na podstawie analizy falkowej z użyciem 24 skal automatycznie dobranych przez algorytm analizy falkowej funkcji CWTFT. Wykres 9 przedstawia błąd rekonstrukcji, osiągający sumaryczną wartość 99.81. Wykres 10 przedstawia wynik analizy falkowej sygnału dla 24 skal.

Skale: 2 2,80402653132277 3,93128239418100 5,51171006770282 7,72749063139876  
10,8340443754951 15,1894739352083 21,2958439555799 29,8570557291778 41,8599882058986  
58,6882587650990 82,2817173272368 115,360059214186 161,736333345772 226,756484890204  
317,915599890812 445,721888407616 624,908000343121 876,129306298985 1228,34490986588  
1722,15585843961 2414,48535906880 3385,14050315965 4746,01189155749

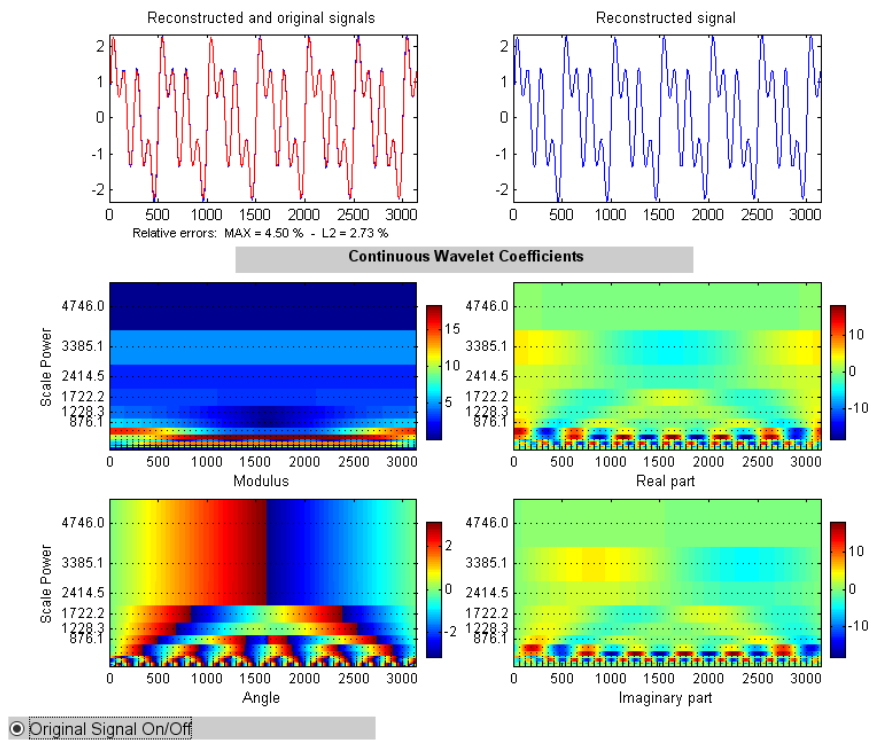
Rysunek 8: Wykres rekonstrukcji sygnału wejściowego na podstawie 24 częstotliwości



Rysunek 9: Wykres błędu rekonstrukcji sygnału wejściowego na podstawie 24 częstotliwości



Rysunek 10: Skalogramy analizy falkowej sygnału wejściowego na podstawie 24 częstotliwości



## 4 Podsumowanie

Wyniki przedstawione w pracy dowodzą istoty dokładnego doboru skal / pseudo-częstotliwości odpowiadających składowym analizowanego sygnału. Użycie dodatkowej częstotliwości (z 2 do 3) spowodowało 4-krotny spadek wartości błędu przy wzroście wymaganej informacji do zakodowania sygnału o 0.5. Natomiast przy użyciu 8-krotnie większej ilości skal (odpowiadający 8-krotnemu zwiększeniu zapotrzebowania na pamięć) zaobserwowano 5-krotny spadek wartości błędu.

Dodatkowym wnioskiem płynącym z analizy jest to, że w przypadku zastosowania małej ilości skal do analiz, większość błędów rekonstrukcji jest na początku i końcu sygnału. Zastosowanie 3 częstotliwości odpowiadających składowym sygnału wejściowego pozwoliło na osiągnięcie dokładnej reprezentacji środkowej części sygnału, natomiast zastosowanie 24 częstotliwości pozwoliło na objęcie rekonstrukcją początku i końca sygnału.

Interesujące jest to, że przeprowadzanie rekonstrukcji z użyciem 2 oraz 3 składowych prowadziło do zmiany domeny sygnału. Wymagane było przeprowadzenie normalizacji i sprowadzenie do domeny sygnału wejściowego. Efekt ten nie występował w przypadku dekompozycji i rekonstrukcji z użyciem 24 składowych.

## 5 Załączniki

### 5.1 Kod źródłowy: freq2scale

```
function [ scales ] = freq2scale( frequencies,wname,delta )
    c_f = centfrq(wname); %Wavelet center frequency
    scales = c_f ./ (delta .* frequencies);
end
```

### 5.2 Kod źródłowy: main

```
%Pseudo-Frequencies for CWT
frequencies = [4 2 1];

%Properties
wname = 'morl';

%Input
fsample = 500;
t=0:1/fsample:2*pi;

y1 = sin(2*pi*t);
y10 = sin(2*pi*t*2);
y20 = sin(2*pi*t*4);

y = y1+y10+y20;

%scales based on frequencies
scales = freq2scale(frequencies, wname, 1/fsample);

%FFT based CWT transform
y_cwtft = cwtft(y, 'plot', 'wavelet', wname, 'scales', scales);

%Obtain signal based on CWT
y_icwtft = icwtft(y_cwtft,'signal',y,'plot');

%Normalize output between -1 and 1
y_icwtft= (y_icwtft - min(y_icwtft)) / ( max(y_icwtft) - min(y_icwtft) );

%Bring back to input range
y_icwtft= min(y) + (max(y)-min(y))*y_icwtft;

figure
plot(t,y,'r');
hold on;
plot(t,y_icwtft,'b');
```

```
hold on;
legend('Input','Output');
xlabel('Time');
ylabel('Value');
title('Signal transformation');

figure
plot(t,y-y_icwtft,'b');
hold on;
plot(t,abs(y-y_icwtft),'r');
hold on;
legend('Diff','Normalized Diff');
xlabel('Time');
ylabel('Value');
title({'Signal diff',sprintf('summary diff (%0.2f)',sum(abs(y-y_icwtft)))});
```