SZEREG FOURIERA

$x(t)$, $t \in$ R – sygnał okresowy o okresie T

Przebieg $x(t)$ przedstawiamy w postaci nieskończonej sumy *składowych harmonicznych* o postaci:

$$x_n(t) = A_n \cos\left(\omega_n t + \varphi_n\right) = A_n \cos\left(2\pi f_n t + \varphi_n\right),\ n = 1,2,... \qquad (*)$$

gdzie:

A_n – amplituda n-tej składowej harmonicznej
f_n – częstotliwość n-tej składowej harmonicznej ($\omega_n = 2\pi f_n$ - pulsacja)
φ_n – faza początkowa n-tej składowej harmonicznej

Rozwijając (*) otrzymujemy

$$x_n(t) = a_n \cos\left(2\pi f_n t\right) + b_n \sin\left(2\pi f_n t\right),\ a_n = A_n \cos\left(\varphi_n\right),\ b_n = -A_n \sin\left(\varphi_n\right)$$

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2},\quad \varphi_n = -arctg\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Szereg trygonometryczny Fouriera

Trygonometryczny szereg Fouriera dla przebiegów okresowych ma postać:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(n\omega_0 t + \varphi_n\right),\quad \omega_n = n\omega_0$$

lub równoważnie:

$$\boxed{x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(n\omega_0 t\right) + b_n \sin\left(n\omega_0 t\right)\right]}$$

$a_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t)\cos\left(n\omega_0 t\right)dt$ - współczynniki widma parzystego

$b_n = \frac{2}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t)\sin\left(n\omega_0 t\right)dt$ - współczynniki widma nieparzystego

Sygnał parzysty ma zawsze widmo parzyste (b_n=0), natomiast sygnał nieparzysty – widmo nieparzyste (a_n=0).

Szereg zespolony Fouriera

Wzory Eulera: $\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2},\quad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$

$$\boxed{x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t},\quad c_n = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2} x(t)\ e^{-jn\omega_0 t}dt}$$ *c_n- amplituda zespolona*

Pomiędzy szeregiem trygonometrycznym a zespolonym zachodzą związki:

$$a_n = c_n + c_{-n} = c_n + c_n^* = 2\,\mathrm{Re}\left(c_n\right)$$
$$b_n = j\left(c_n - c_{-n}\right) = j\left(c_n - c_n^*\right) = -2\,\mathrm{Im}\left(c_n\right)$$
$$c_n = c_{-n}^*$$

$$\boxed{A_n = 2\left|c_n\right| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$$

Widmo amplitudowe: $\left\{\left|c_n\right|,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\right\}$

Widmo fazowe:

$$\varphi_n = \begin{cases} \arg\left(c_n\right) & \text{gdy } \mathrm{Im}\left(c_n\right) \neq 0 \\ 0 & \text{gdy } \mathrm{Im}\left(c_n\right) = 0, \mathrm{Re}\left(c_n\right) \geq 0 \\ \pi \cdot \mathrm{sgn}\left(n\right) & \text{gdy } \mathrm{Im}\left(c_n\right) = 0, \mathrm{Re}\left(c_n\right) < 0 \end{cases}$$

Wykres widma otrzymanego z trygonometrycznego szeregu Fouriera nie zawiera częstotliwości ujemnych. Widmo otrzymane z szeregu zespolonego zawiera zarówno częstotliwości dodatnie, jak i ujemne.

Widmo mocy: $\left\{\left|c_n\right|^2,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\right\}$

Własności zespolonego szeregu Fouriera

Liniowość

$$x_1\left(t\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t},\quad x_2\left(t\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\boxed{x\left(t\right) = C \cdot x_1\left(t\right) + D \cdot x_2\left(t\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(C \cdot c_n + D \cdot d_n\right) e^{jn\omega_0 t}}$$

Przesunięcie w czasie

$$x_1\left(t\right) = x\left(t - t_0\right) +$$

$$\boxed{x_1\left(t\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0\left(t - t_0\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t_0} e^{jn\omega_0 t}}$$

Twierdzenie Parsevala

Wartość średnia mocy przebiegu periodycznego wyliczona w dziedzinie czasu jest równa sumie mocy składowych harmonicznych oraz mocy składowej stałej.

$$\boxed{P = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} x^2\left(t\right)\, dt = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|c_n\right|^2}$$

Zależności energetyczne mogą służyć do oceny dokładności przybliżenia kształtu danego przebiegu przez sumy cząstkowe szeregu Fouriera. Miarą takiego przybliżenia może być ***odchylenie standardowe***.

$$\boxed{\sigma_m^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left\{x(t) - x_m(t)\right\}^2 dt}$$

gdzie:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n),\; x_m(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{m} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

$$\boxed{\sigma_m^2 = \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2}}$$

Błąd średniokwadratowy jest równy sumie mocy pominiętych składowych harmonicznych.