SYGNAŁY, MODULACJE I SYSTEMY

Wykład 2

Splot, funkcja autokorelacji i sygnały dystrybucyjne

Kajetana Snopek

SPLOT SYGNAŁÓW

Splotem dwustronnym dwóch sygnałów x_1 i x_2 nazywamy sygnał y:

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t-\tau) d\tau$$

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k) x_2(n-k)$$

- przemienność: $x_1 * x_2 = x_2 * x_1$
- łączność: $x_1 * (x_2 * x_3) = (x_1 * x_2) * x_3$
- rozdzielność względem dodawania:

$$x_1 * (x_2 + x_3) = (x_1 * x_2) + (x_1 * x_3)$$

FUNKCJA AUTOKORELACJI (SYGNAŁY ENERGII)

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

- dla sygnałów rzeczywistych w definicji opuszczamy znak sprzężenia
- funkcja hermitowska: $R_x(\tau) = R_x^*(-\tau)$
- dla sygnałów rzeczywistych: $R_x(\tau)$ rzeczywista, parzysta
- Energia sygnału jest równa wartości funkcji autokorelacji dla $\tau = 0$.

FUNKCJA AUTOKORELACJI (SYGNAŁY MOCY)

$$R_x(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

Definicja ogólna

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t)\, x^*(t-\tau)\, dt$$

Definicja dla sygnałów okresowych

- Własności identyczne, jak dla sygnałów energii, oprócz:
- Moc średnia/moc średnia za okres sygnału jest równa wartości funkcji autokorelacji dla $\tau = 0$.

4

SYGNAŁY DYSTRYBUCYJNE

RYS HISTORYCZNY

- Pojęcie dystrybucji wprowadził po raz pierwszy Paul Dirac - brytyjski fizyk teoretyk, współtwórca mechaniki kwantowej i elektrodynamiki kwantowej, 1933 – laureat nagrody Nobla za rozwinięcie teorii budowy atomu.
- Prace z uogólnionej teorii dystrybucji zawdzięczamy m.in. takim naukowcom jak: Laurent Schwartz (1915-2002), Sergiej Sobolew (1908-1989), Jan Mikusiński (1913-1987).

Paul Dirac (1902-1984)
(źródło: *pl. wikipedia.org*)

JAN MIKUSIŃSKI (1913-1987)

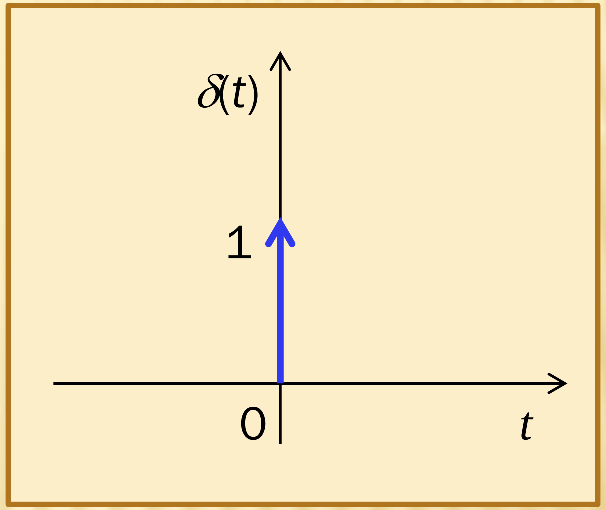
- wybitny matematyk
- profesor Uniwersytetu Wrocławskiego i Warszawskiego
- członek PAN
- obszary zainteresowań: analiza rzeczywista i zespolona, równania różniczkowe i funkcyjne, analiza funkcjonalna i funkcje uogólnione, teoria miary i całki, algebra i geometria, teoria liczb, mechanika, elektrotechnika, akustyka , optyka, fotografika, chromatografia, muzyka.
- liczne prace z dziedziny analizy funkcjonalnej i uogólnionej teorii dystrybucji

Jan Mikusiński (1913-1987)
(źródło: *www.math.us.edu.pl*

DYSTRYBUCJA DIRACA

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \neq 0 \\ \infty & \text{dla} \quad t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 \quad \text{(warunek pola)}$$



- dystrybucja Diraca nazywana jest również deltą Diraca lub δ-funkcją
- δ-funkcja nie jest funkcją w zwykłym sensie ze względu na to, że dla $t = 0$ nie przyjmuje wartości liczbowej
- Dystrybucja $\delta(t)$ jest modelem matematycznym sygnału impulsowego o nieskończenie krótkim czasie trwania i nieskończenie dużej amplitudzie.

UOGÓLNIONA TEORIA DYSTRYBUCJI

- $\delta(t)$ jest granicą ciągu $\{f(t,\alpha)\}$ funkcji spełniających warunki:

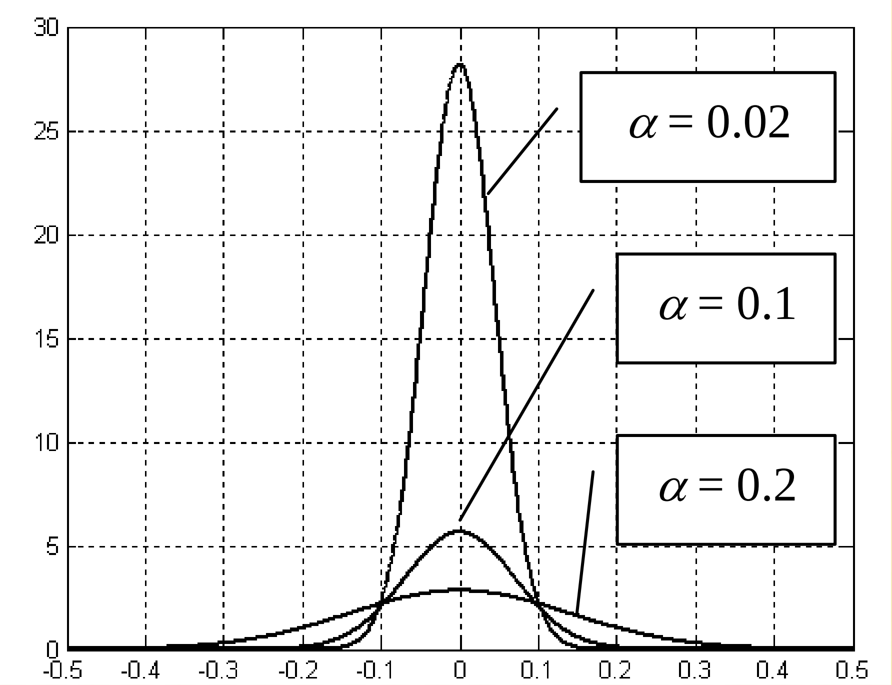
$$\lim_{\alpha \to 0} f(t,\alpha) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad t \neq 0 \\ \infty & \text{dla} \quad t = 0 \end{cases}$$

$$\forall \alpha > 0: \int_{-\infty}^{\infty} f(t,\alpha)\, dt = 1$$

- ciąg $\{f(t,\alpha)\}$ nazywany jest ciągiem aproksymującym dystrybucję $\delta(t)$

PRZYKŁADY CIĄGÓW APROKSYMUJĄCYCH

- Ciąg sygnałów gaussowskich

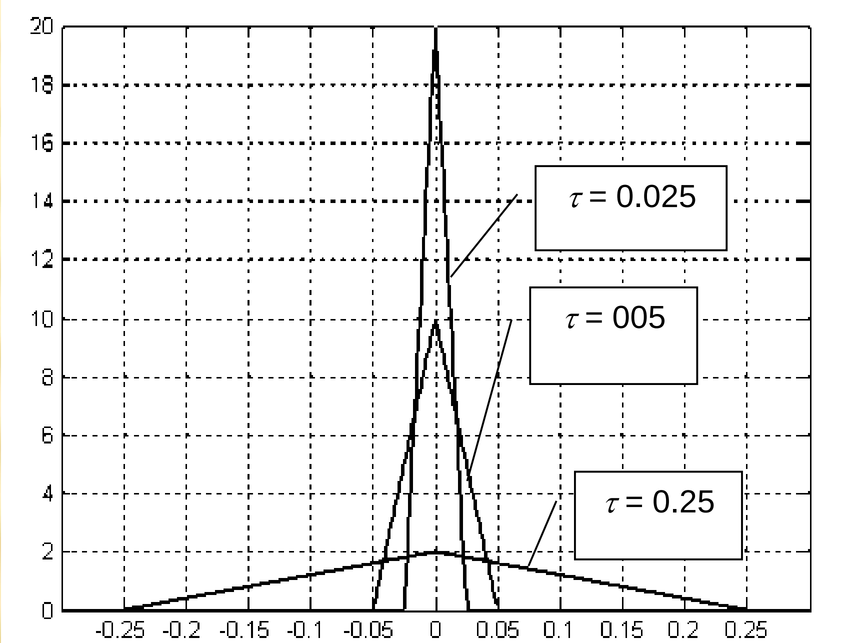


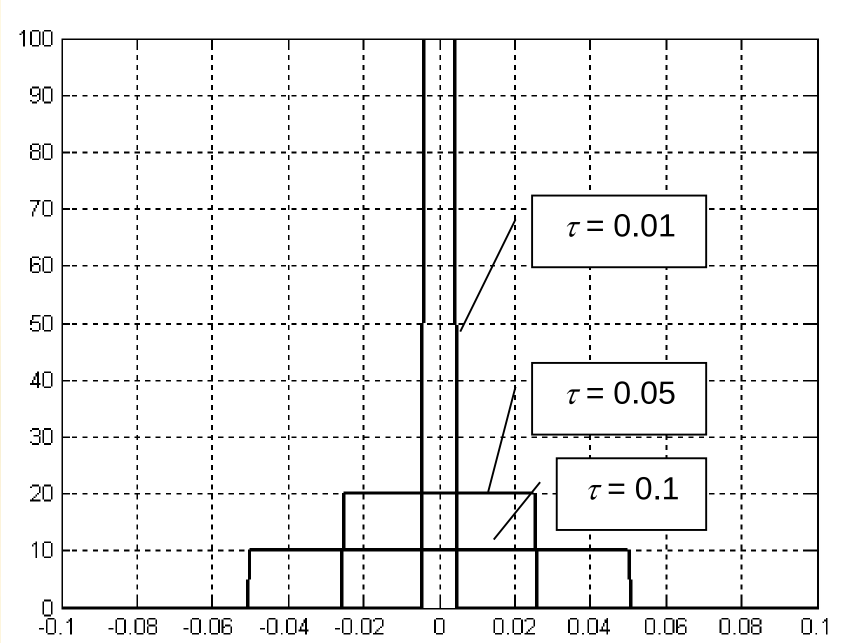
$$f(t,\alpha) = \frac{1}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{t^2}{\alpha^2}}$$

$$\delta(t) = \lim_{\alpha \to 0} f(t,\alpha)$$

PRZYKŁADY CIĄGÓW APROKSYMUJĄCYCH

- Ciągi impulsów trójkątnych i prostokątnych





$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

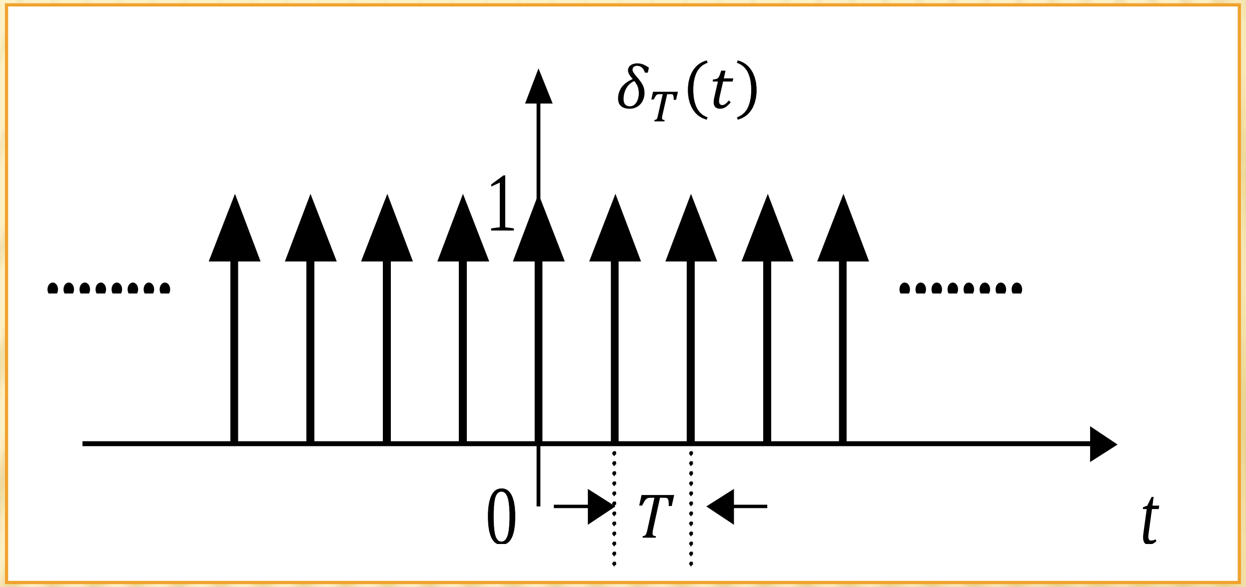
$$\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

WŁASNOŚCI DYSTRYBUCJI DELTA

- parzystość: $\delta(-t) = \delta(t)$
- mnożenie przez stałą: $\int A\delta(t)dt = A\int \delta(t)dt = A$
- związek ze skokiem jednostkowym: $\frac{d}{dt}\mathbf{1}(t) = \delta(t) \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \mathbf{1}(t)$
- próbkowanie: $x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t), x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0)$
- filtracja: $\int x(t)\delta(t)dt = x(0), \int x(t)\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$
- zmiana skali: $\delta(t/t_0) = |t_0|\delta(t)$
- splot: $x(t) * \delta(t) = x(t), x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

DYSTRYBUCJA GRZEBIENIOWA

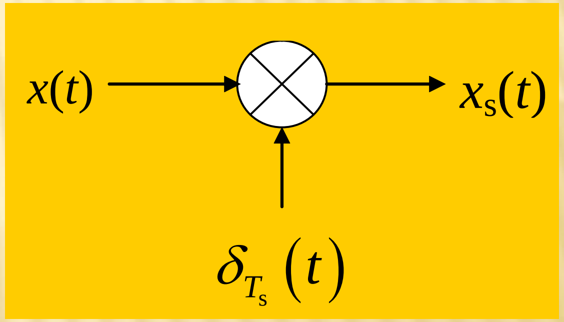
$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_0)$$



Dystrybucja grzebieniowa jest modelem okresowego sygnału próbkującego o równomiernym okresie próbkowania (próbkowanie równomierne)

WŁASNOŚCI DYSTRYBUCJI GRZEBIENIOWEJ

- próbkowanie sygnału czasu ciągłego



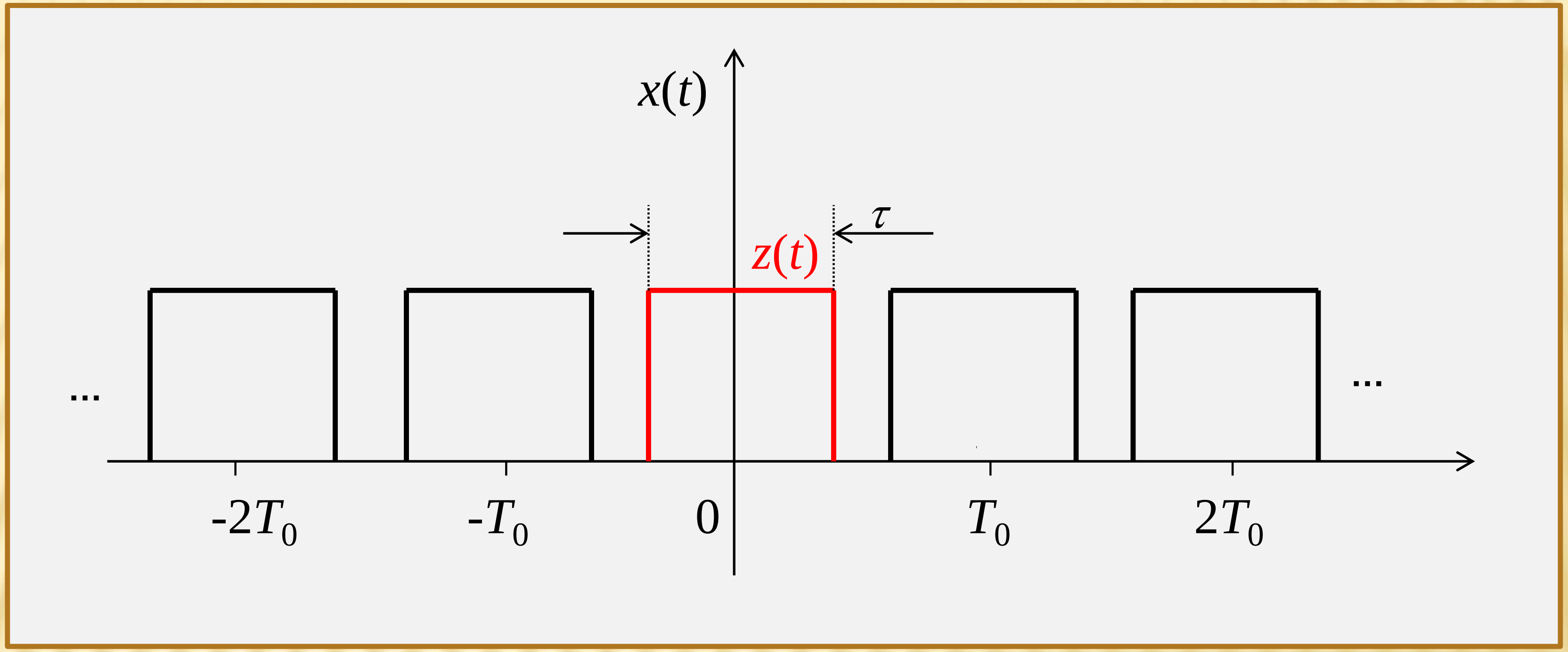
$$x(t)\delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

T_s – odstęp (okres) próbkowania

- powielenie okresowe sygnału impulsowego o czasie trwania $\tau \le T_0$

$$x(t) = z(t) * \delta_{T_0}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(t - nT_0)$$

POWIELENIE OKRESOWE SYGNAŁU



$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} z(t - nT_0)$$