

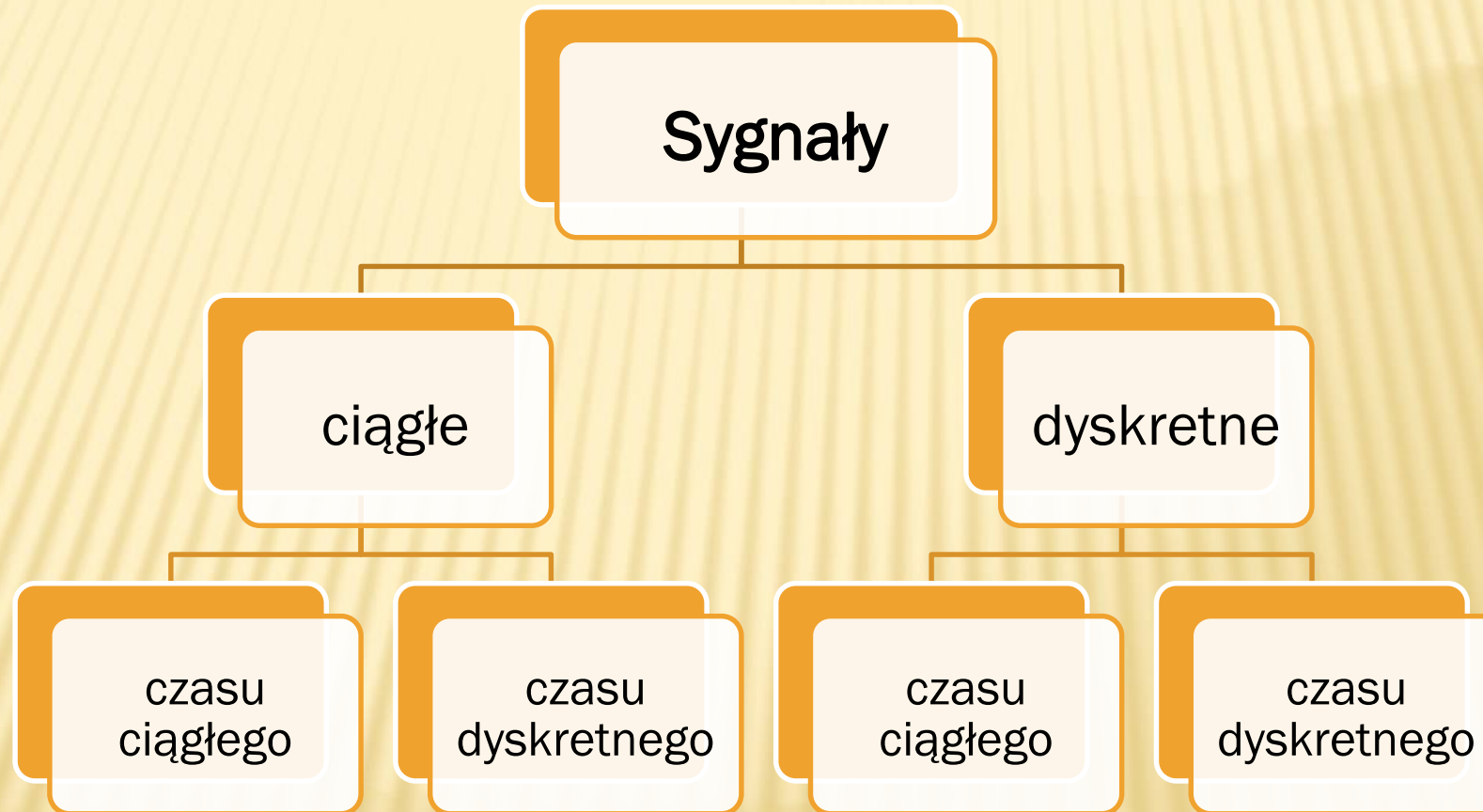
# SYGNAŁY, MODULACJE I SYSTEMY

## Wykład 1

## Wprowadzenie do teorii sygnałów

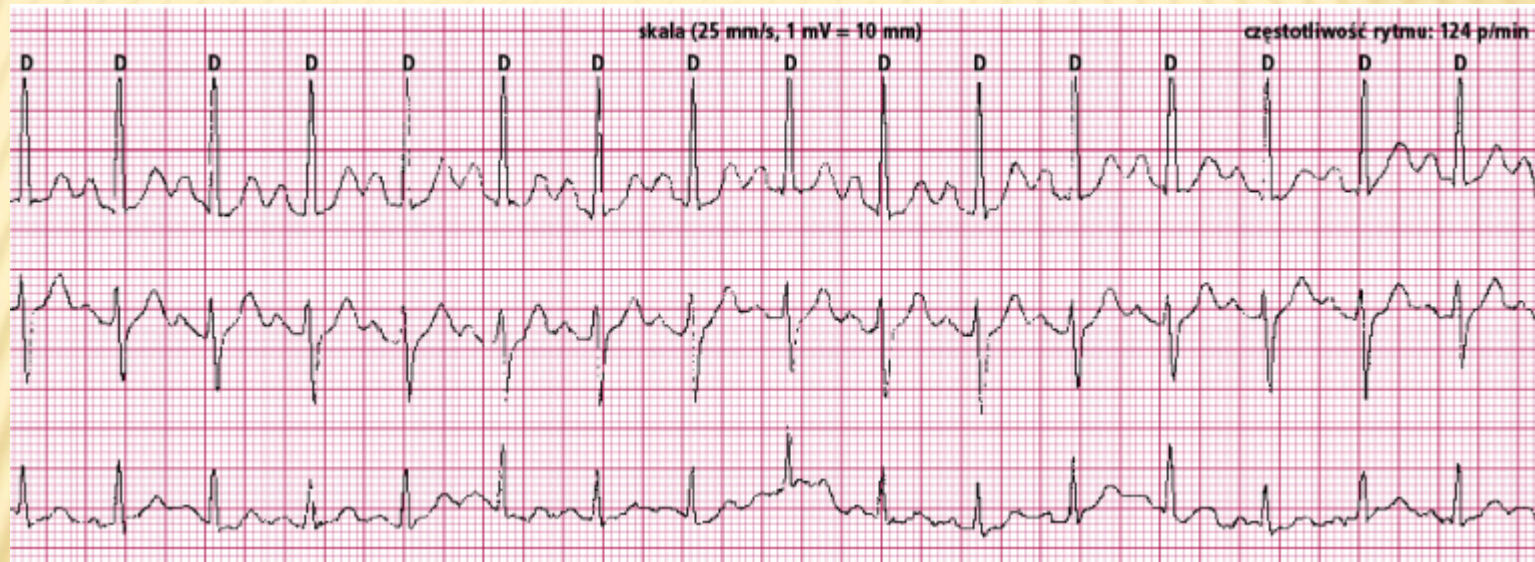
Kajetana Snopek

# SYGNAŁY CIĄGŁE I DYSKRETNE



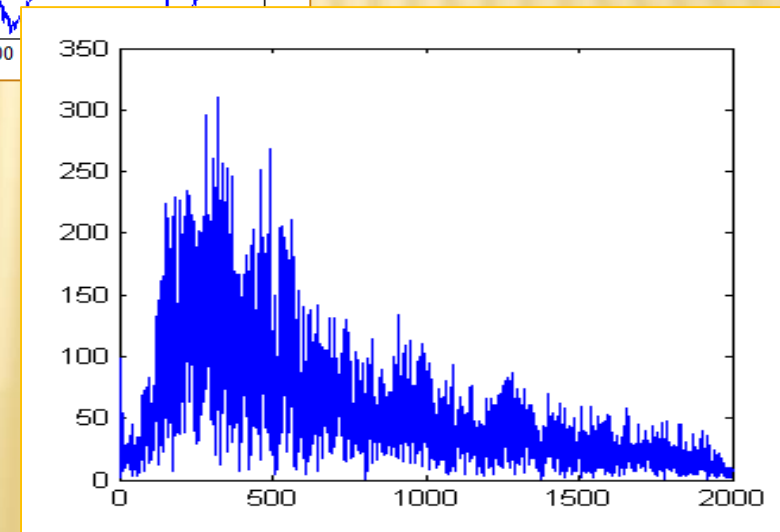
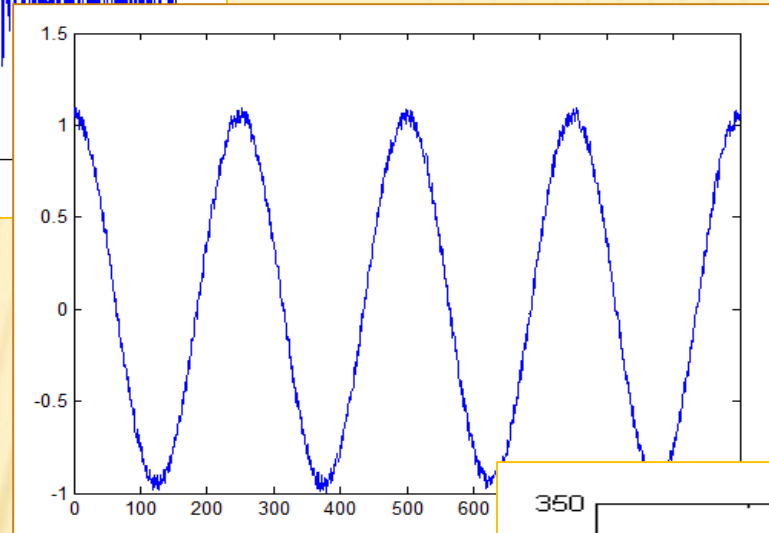
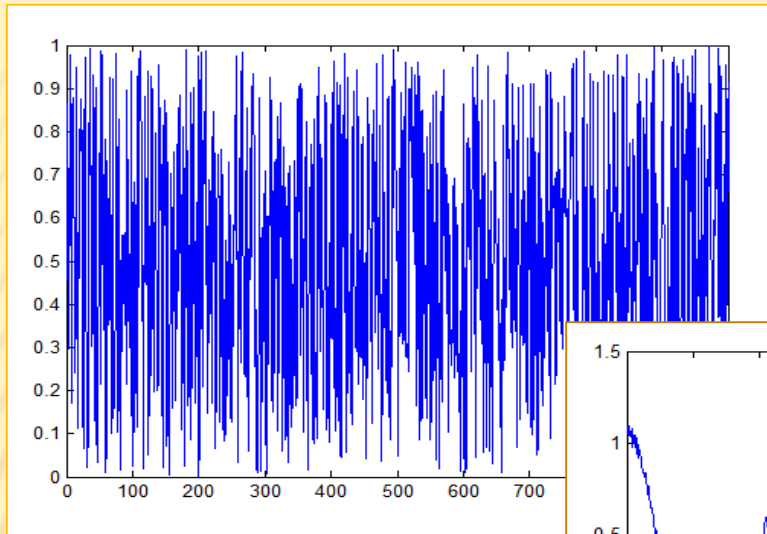
# SYGNAŁY CIĄGŁE CZASU CIĄGŁEGO

- × Przykłady: EKG, EEG, EMG



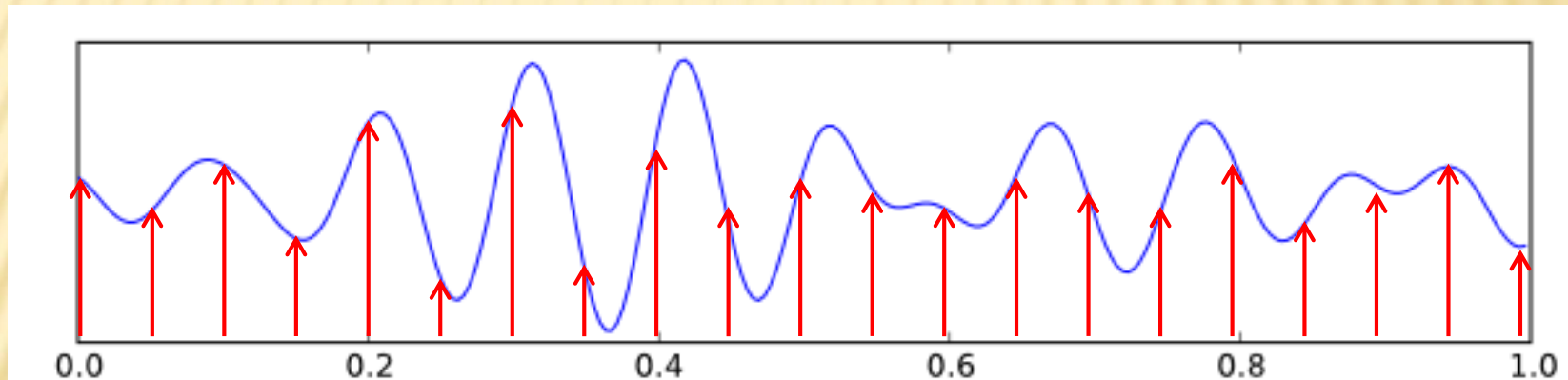
Przykładowa realizacja sygnału EKG (źródło: [www.mp.pl](http://www.mp.pl) )

# SYGNAŁY LOSOWE CIĄGŁE czasu ciągłego



# SYGNAŁY CIĄGŁE czasu dyskretnego

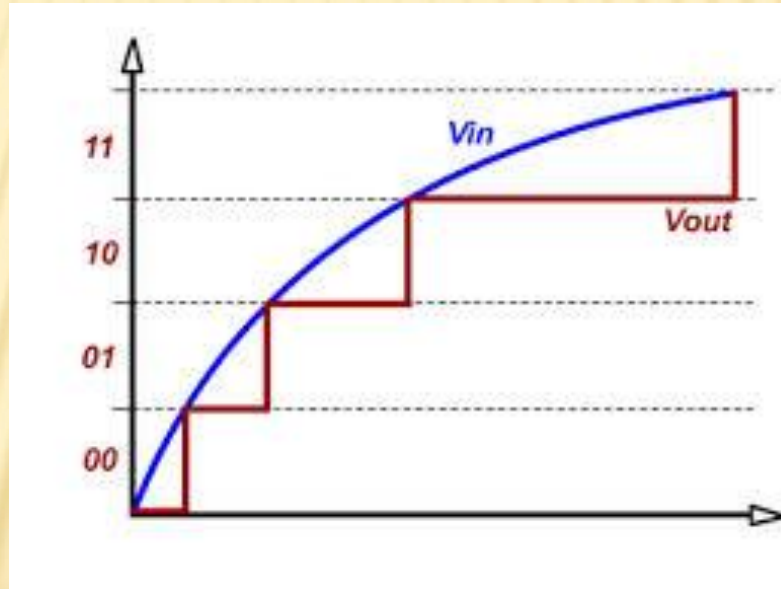
Przykład: sygnał po **próbkowaniu idealnym** sygnału analogowego



Przykładowa realizacja sygnału EEG (fala  $\alpha$ ); kolorem **czzerwonym** zaznaczono sygnał spróbkowany

# SYGNAŁY DYSKRETNE czasu ciągłego

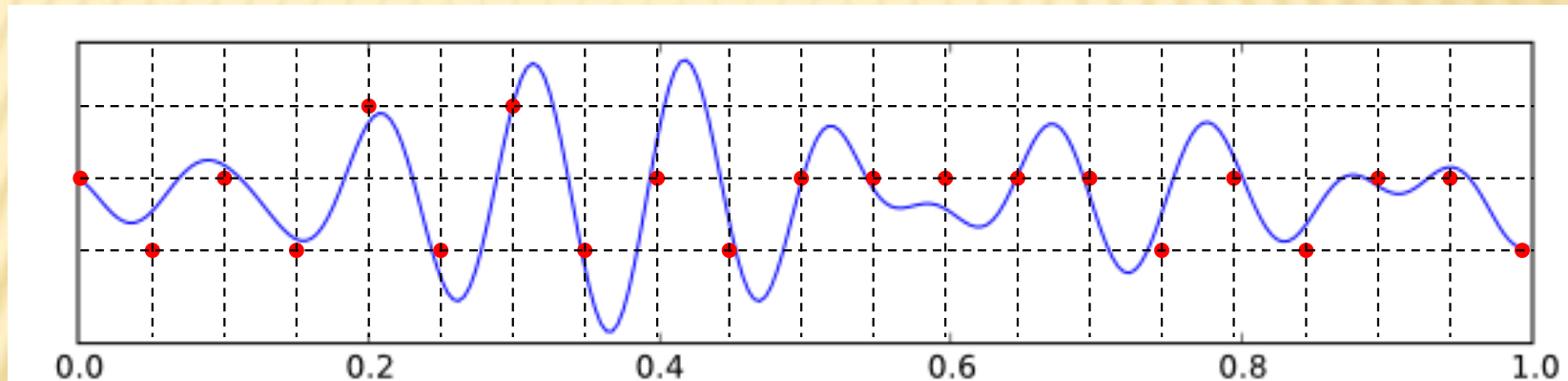
Sygnał schodkowy na wyjściu przetwornika A/C ( $V_{out}$ )



(źródło: [www.physicsforum.com](http://www.physicsforum.com) )

# SYGNAŁY DYSKRETNE czasu dyskretnego

Przykład: sygnał spróbkowany idealnie po **kwantyzacji** równomiernej

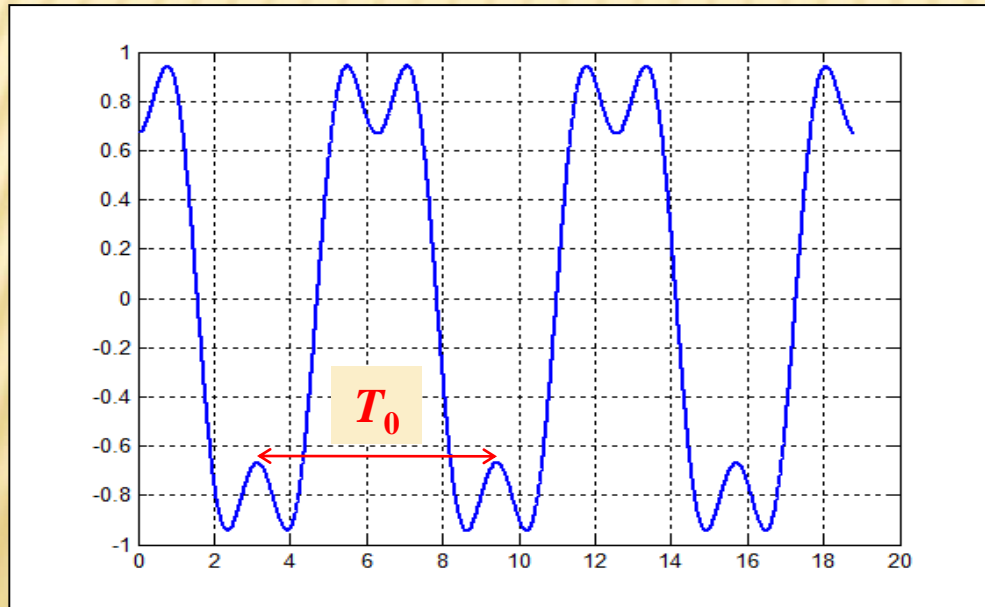


Przykładowa realizacja sygnału EEG (fala  $\alpha$ ); kolorem **czzerwonym** zaznaczono sygnał skwantowany

# SYGNAŁY OKRESOWE

Sygnal analogowy  $x(t)$  jest **okresowy** jeżeli:

$$\exists T_0 > 0, \forall t \in \mathbb{R} : x(t) = x(t + T_0)$$



$T_0$  - okres podstawowy

$f_0 = 1/T_0$  - częstotliwość podstawowa

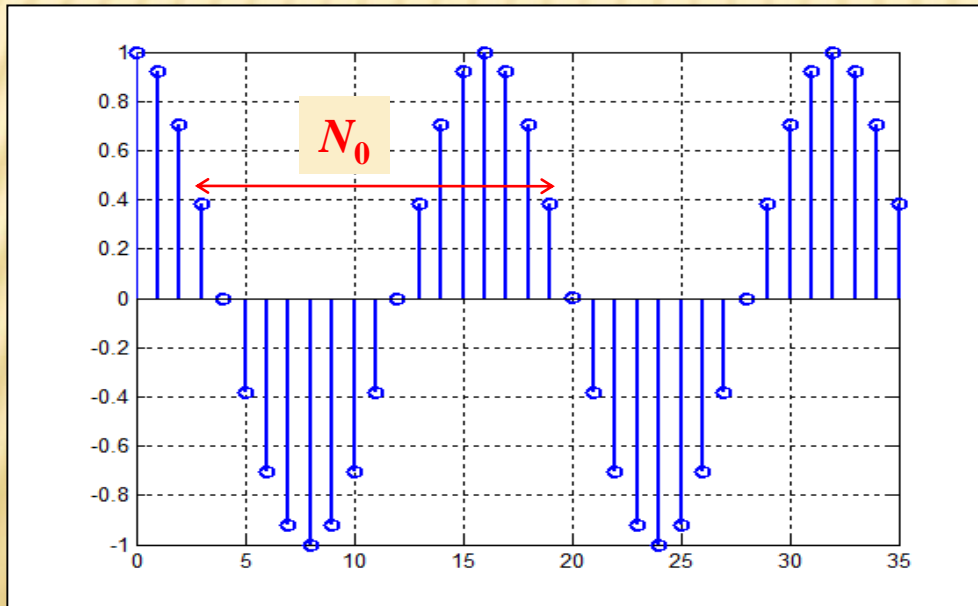
$\omega_0 = 2\pi f_0$  - pulsacja podstawowa



# SYGNAŁY OKRESOWE

Sygnal czasu dyskretnego  $x(n)$  jest **okresowy** jeżeli:




$$\exists N_0 > 0, \forall n \in \mathbb{Z} : x(n) = x(n + N_0)$$



$N_0$  - okres podstawowy

# SYGNAŁ HARMONICZNY

$$x(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

A	$f_0$ [Hz]	audio
10	440	
10	523.25	
10	1046.50	

$A$  - amplituda

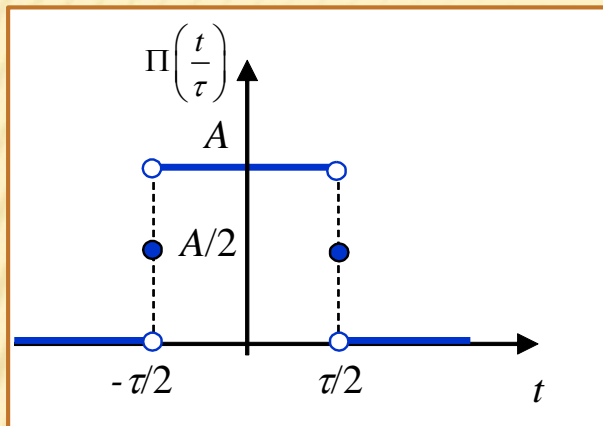
$f_0 = 1/T_0$  - częstotliwość podstawowa

$\omega_0 = 2\pi f_0$  - pulsacja podstawowa

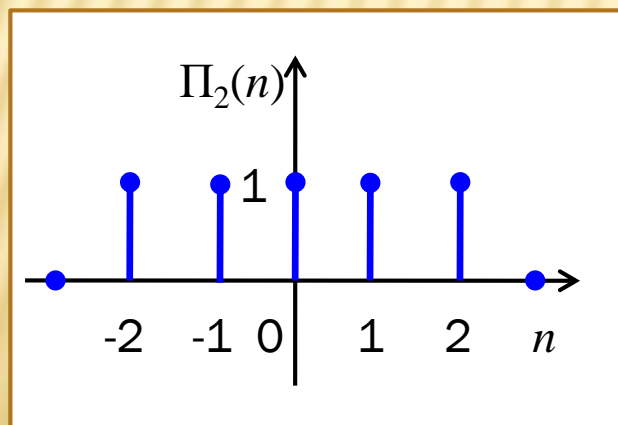
$\varphi_0$  - faza początkowa

# PRZYKŁADY SYGNAŁÓW

## Impuls prostokątny

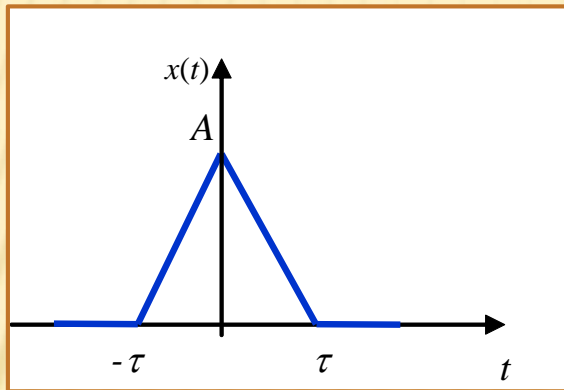


$$x(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} A/2, & t = \pm\tau/2 \\ A, & t \in \left(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right) \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$



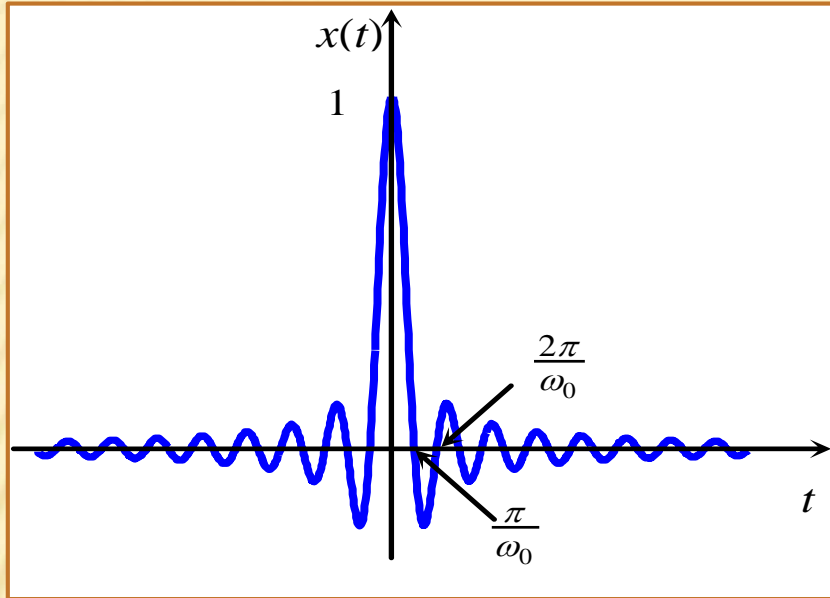
$$\Pi_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \in [-N, N] \\ 0 & \text{dla } n \notin [-N, N] \end{cases}$$

## Impuls trójkątny



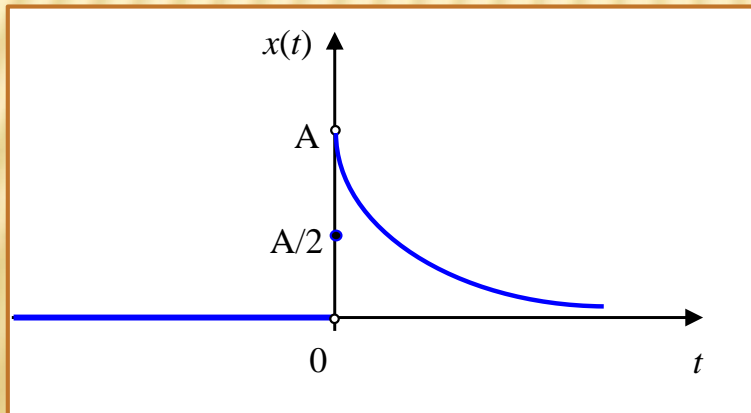
$$x(t) = A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

## Sygnal $\text{Sa}(\omega_0 t)$



$$x(t) = \text{Sa}(\omega_0 t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}$$

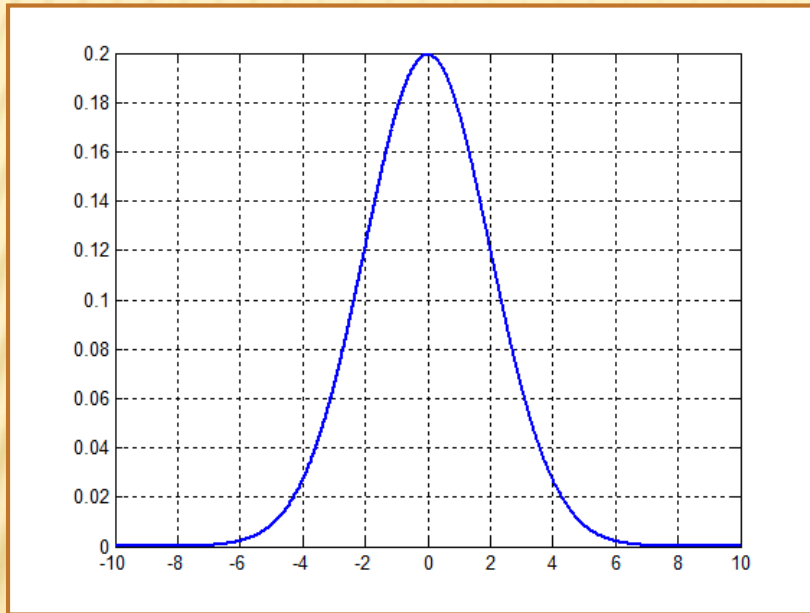
## Sygnal wykładniczy jednostronny malejący



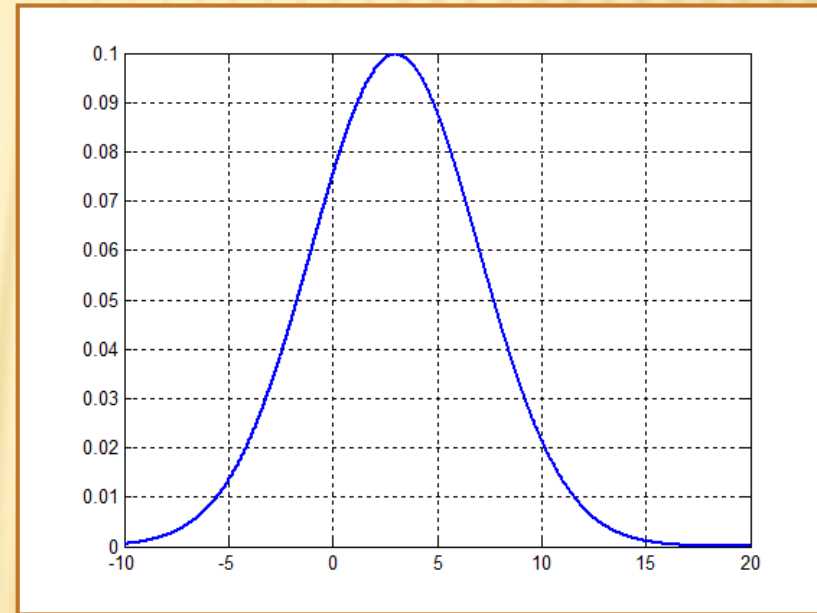
$$x(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \mathbf{1}(t) = \begin{cases} A \cdot e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ \frac{A}{2}, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \alpha > 0$$

# Signal Gaussa

$$g_{\mu,\sigma}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



$$g_{0,2}(t)$$

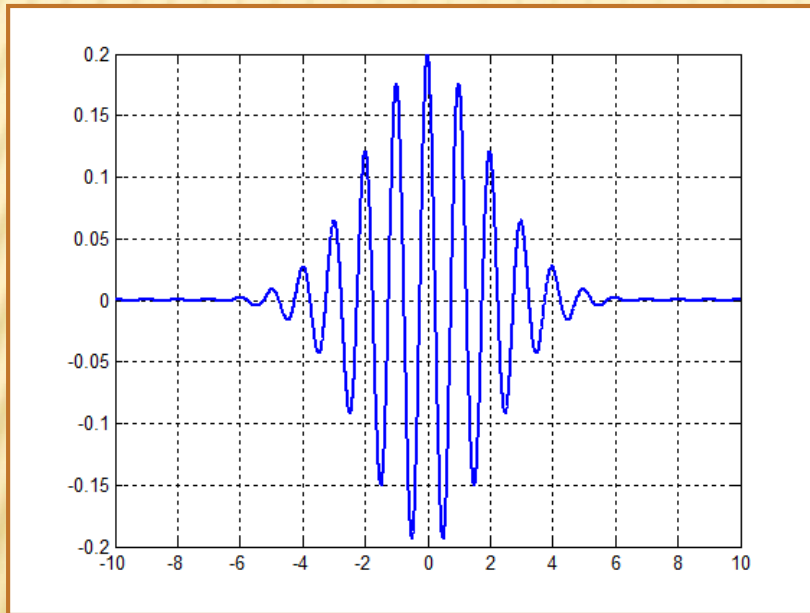


$$g_{3,4}(t)$$

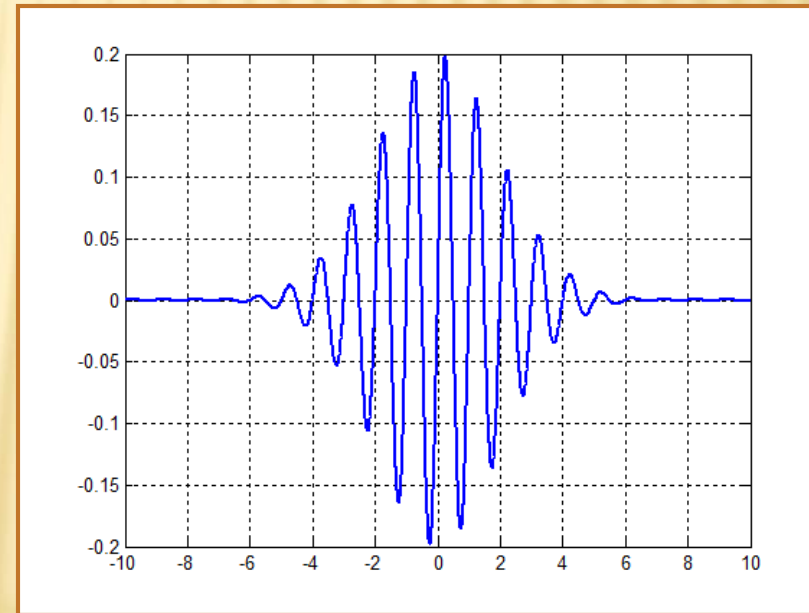
# Sygnal Gabora

$$G_{\mu,\sigma,\omega_0}(t) = g_{\mu,\sigma}(t) e^{j\omega_0 t}$$

$$G_{\mu,\sigma,\omega_0}(t) = g_{\mu,\sigma}(t) \cos(\omega_0 t) + jg_{\mu,\sigma}(t) \sin(\omega_0 t)$$

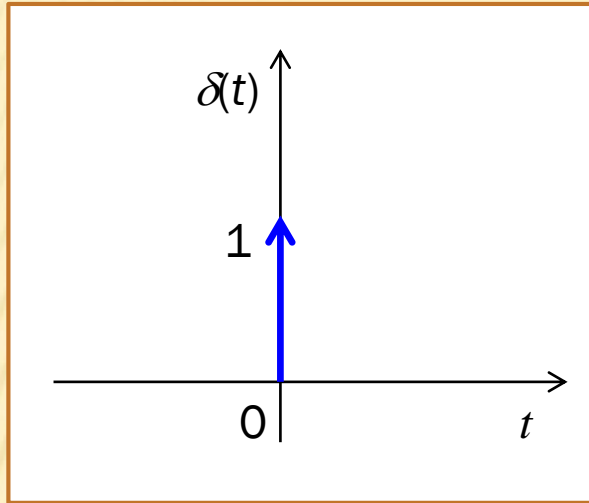


$\text{Re } G_{0,2,2\pi}(t)$



$\text{Im } G_{0,2,2\pi}(t)$

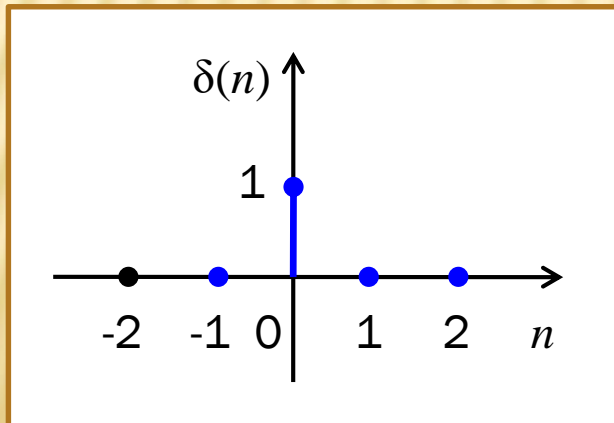
## Delta Diraca $\delta(t)$ (p. Wykład - Sygnały dystrybucyjne)



$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (\text{warunek pola})$$

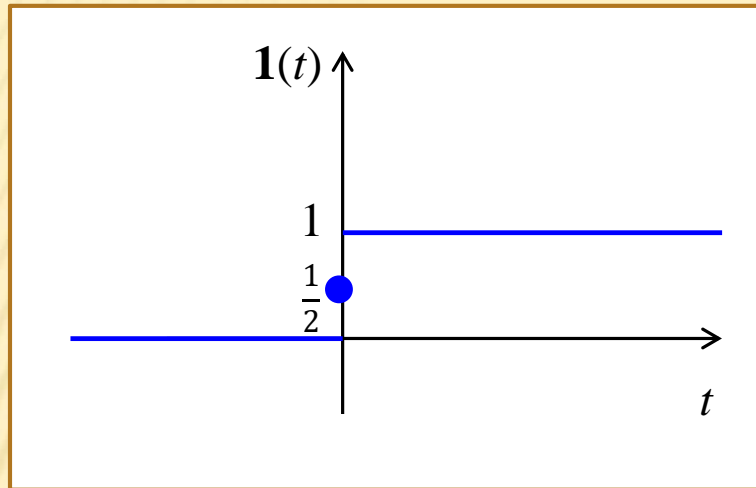
## Delta Kroneckera $\delta(n)$ (impuls jednostkowy)



$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

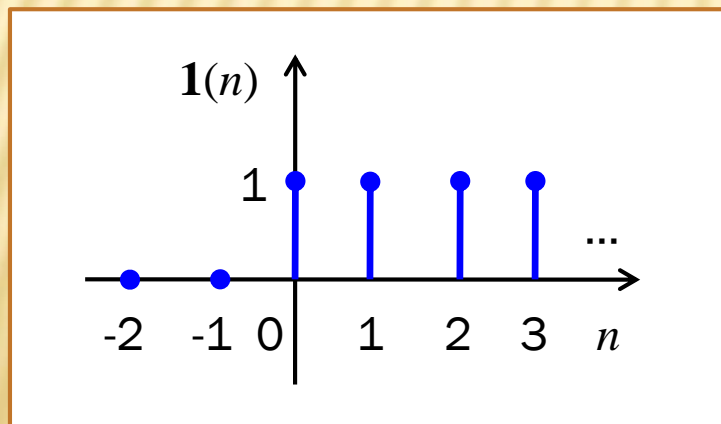


skok jednostkowy  $\mathbf{1}(t)$



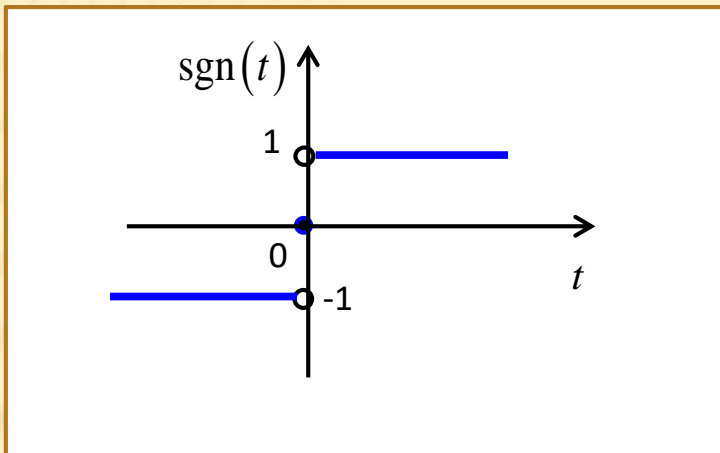
$$\mathbf{1}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$

skok jednostkowy  $\mathbf{1}(n)$

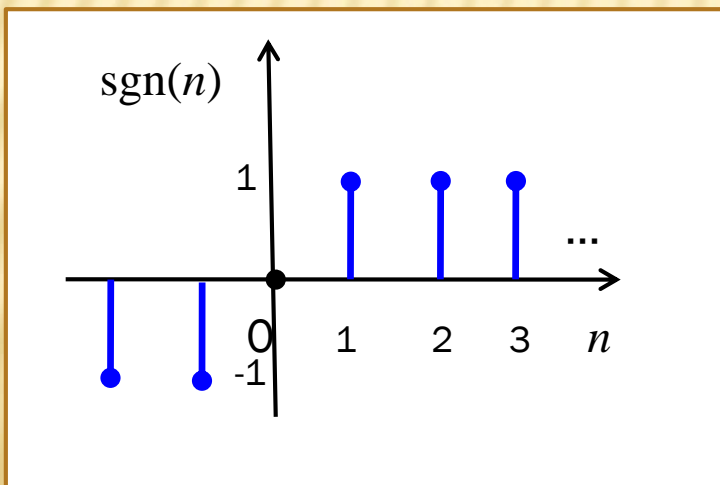


$$\mathbf{1}(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

# Sygnal signum $\text{sgn}(t)$

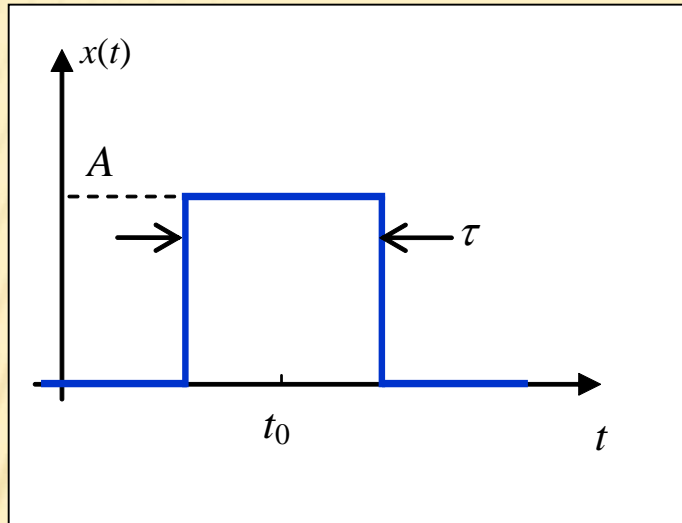


$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

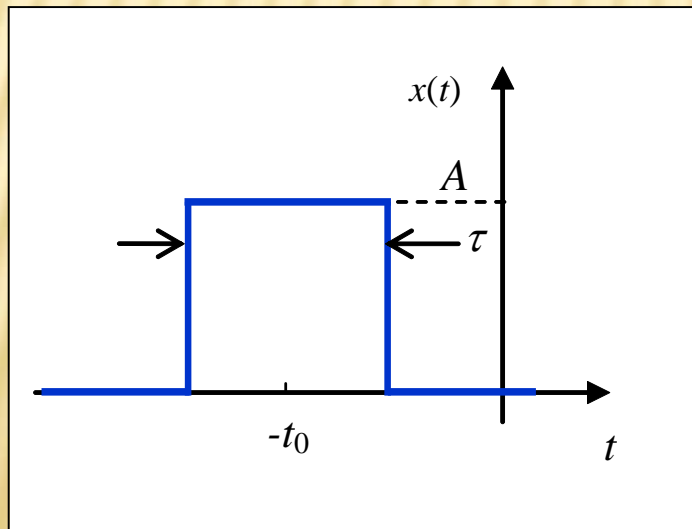


$$\text{sgn}(n) = \begin{cases} 1, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -1, & n < 0 \end{cases}$$

# PRZESUNIĘCIE W CZASIE

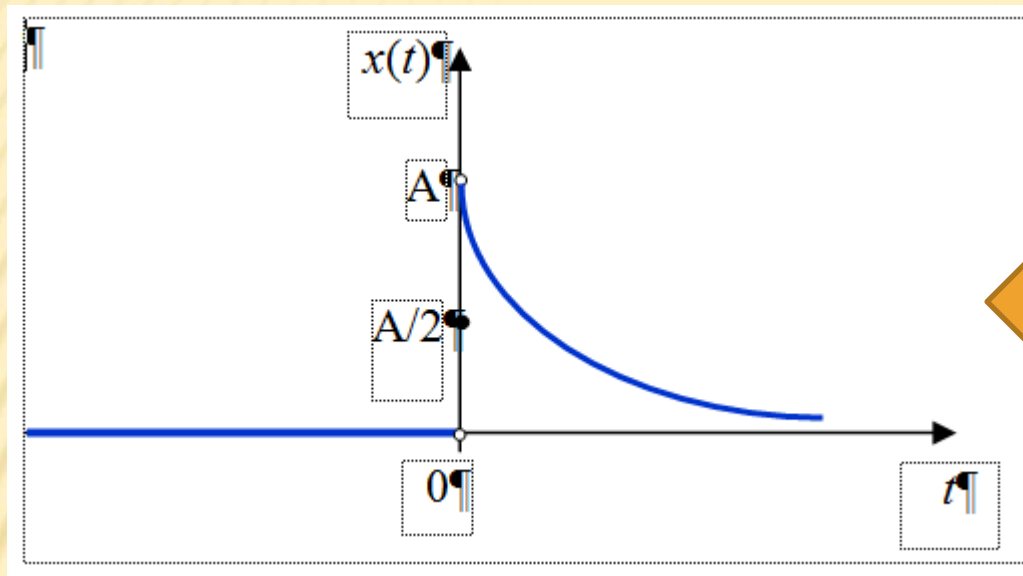


$$x(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right), t_0 > 0$$

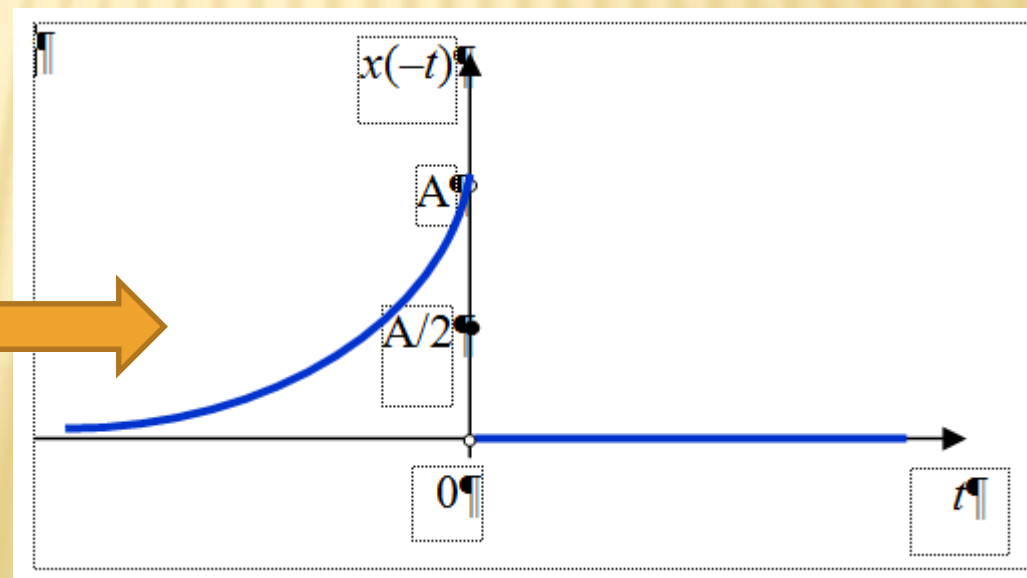


$$x(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t + t_0}{\tau}\right), t_0 > 0$$

# INWERSJA CZASOWA

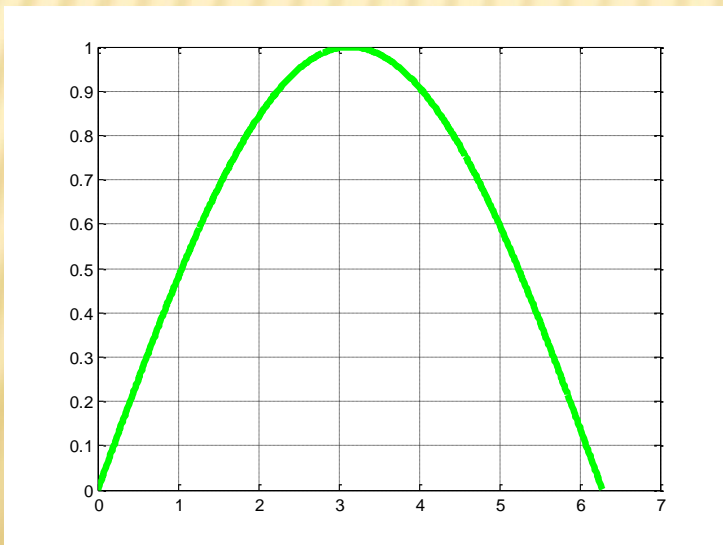
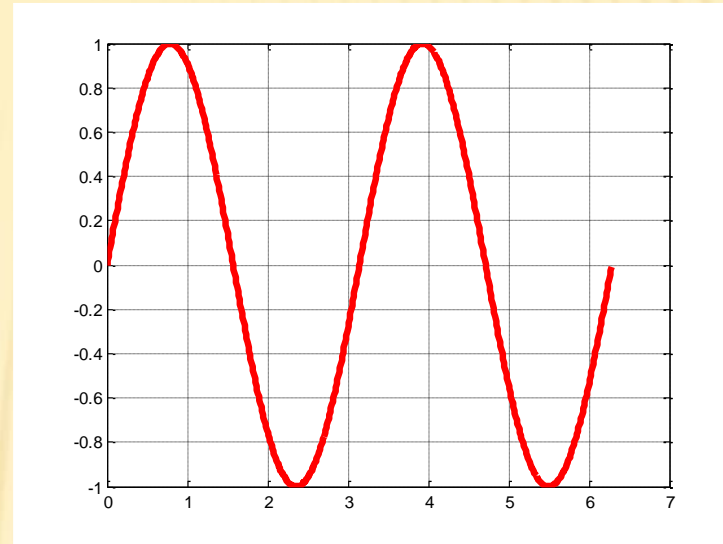
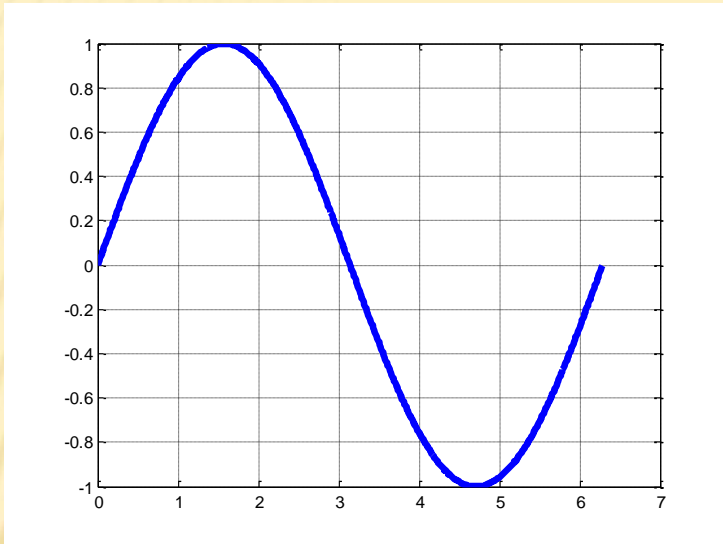


$x(t)$



$x(-t)$

# SKALOWANIE OSI CZASU



$$\sin(t)$$

$$\sin(2t)$$

$$\sin(0.5t)$$

# MNOŻENIE PRZEZ STAŁĄ

$$A \cdot x(t)$$

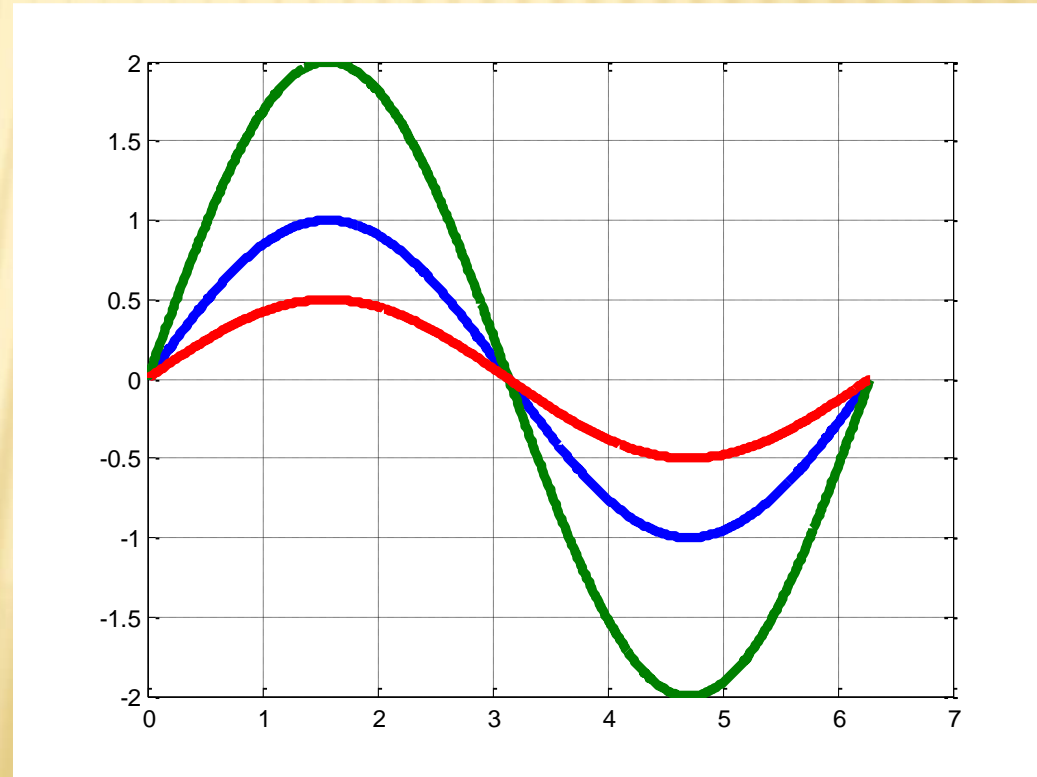
$A > 1$       wzmacnienie sygnału

$A \in (0,1)$     tłumienie sygnału

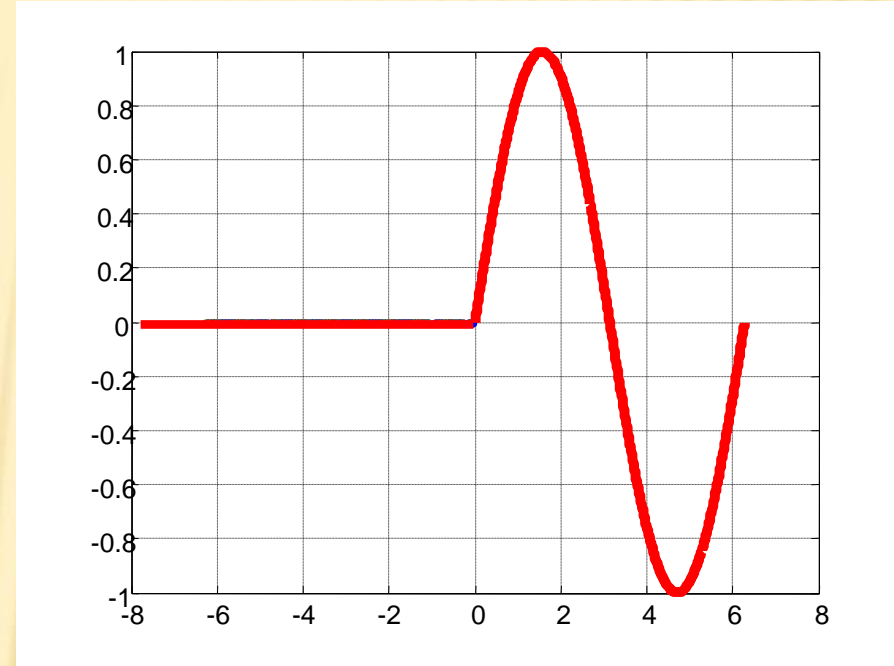
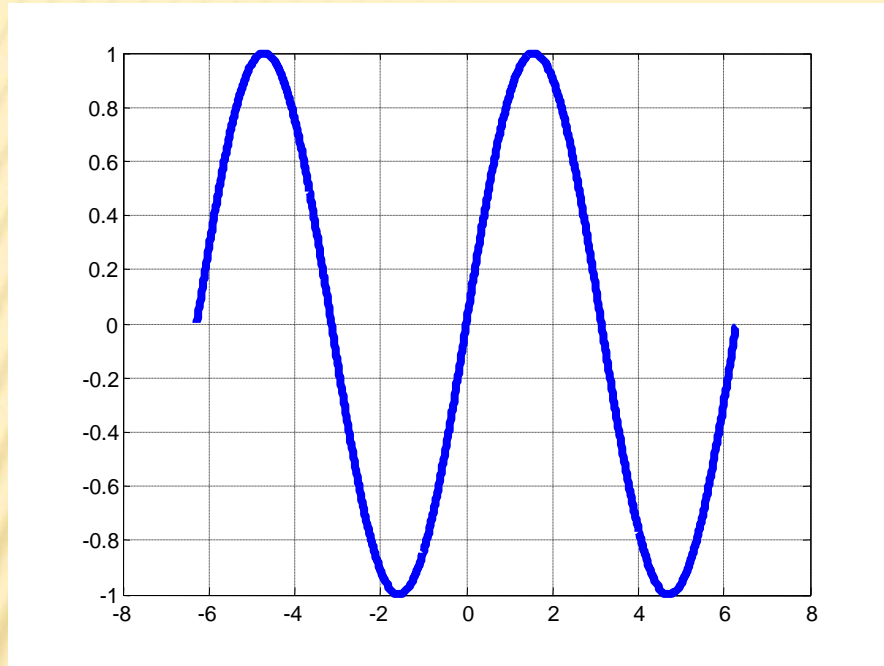
$$\sin(t)$$

$$0.5 \cdot \sin(t)$$

$$2 \cdot \sin(t)$$



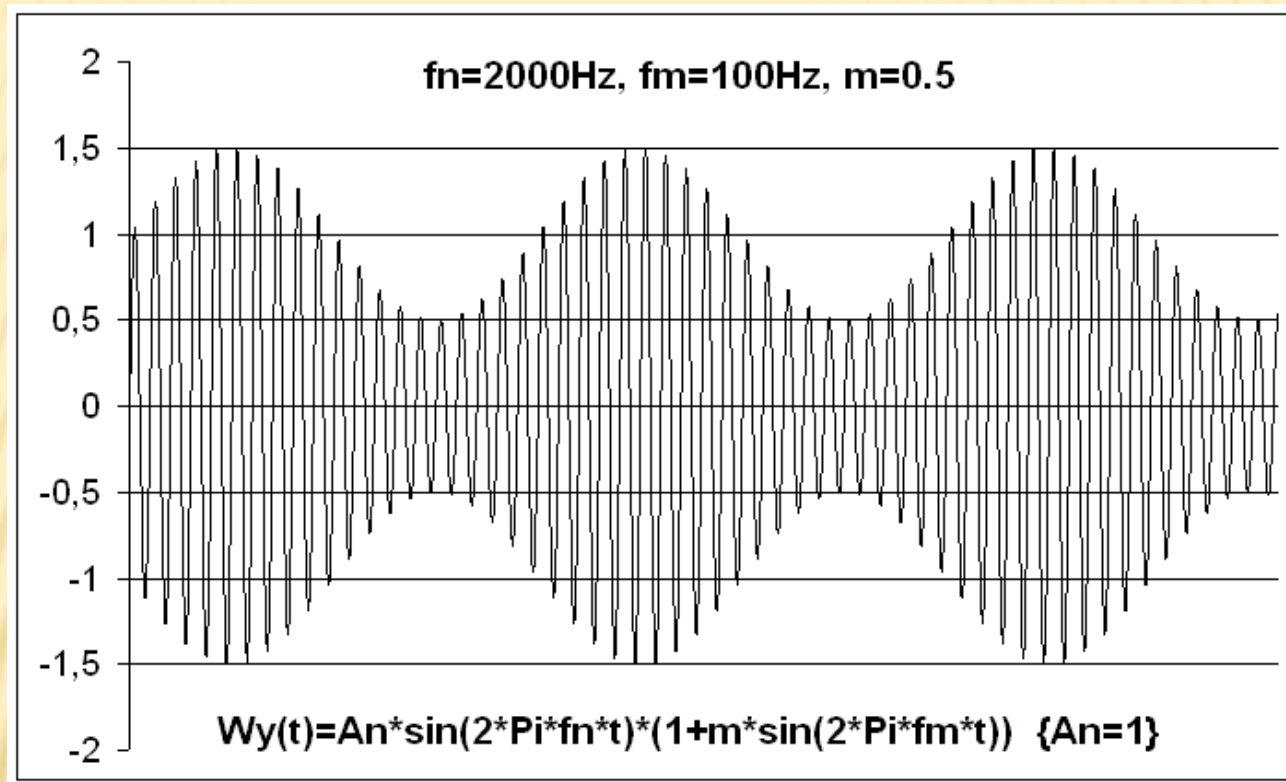
# MNOŻENIE PRZEZ SKOK JEDNOSTKOWY



$$\sin(t)$$

$$\sin(t) \cdot \mathbf{1}(t)$$

# MODULACJA (AMPLITUDE)



(źródło: [www.elektroda.pl](http://www.elektroda.pl))



# PODSTAWOWE PARAMETRY SYGNAŁÓW

	Sygnały czasu ciągłego	Sygnały czasu dyskretnego
wartość średnia	$\bar{x} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} x(t) dt$	$\bar{x} = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x(n)$
energia	$E_x = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\tau}^{\tau}  x(t) ^2 dt$	$E_x = \lim_{M \rightarrow \infty} \sum_{n=-M}^M  x(n) ^2$
moc średnia	$P_x = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau}  x(t) ^2 dt$	$P_x = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M  x(n) ^2$

# SYGNAŁY IMPULSOWE

Dla sygnałów  $x(t)$  rzeczywistych **impulsowych** o czasie trwania od  $t_1$  do  $t_2$ :

$$\bar{x} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t) dt}{t_2 - t_1}$$

$$E_x = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt$$

Dla sygnałów  $x(n)$  rzeczywistych **impulsowych** o czasie trwania od  $n_1$  do  $n_2$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)$$

$$E_x = \sum_{n=n_1}^{n_2} x^2(n)$$

# SYGNAŁY OKRESOWE

Dla sygnałów  $x(t)$  rzeczywistych **okresowych** o okresie podstawowym  $T_0$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x(t) dt \qquad P_x = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} x^2(t) dt$$

Dla sygnałów  $x(n)$  rzeczywistych **okresowych** o okresie podstawowym  $N_0$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{N_0} \sum_{\langle N_0 \rangle} x(n) \qquad P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{\langle N_0 \rangle} x^2(n)$$

# SYGNAŁY ENERGII I MOCY

- ✘ sygnał o ograniczonej energii (**sygnał energii**)  $\Leftrightarrow 0 < E_x < \infty$
- ✘ sygnał o ograniczonej mocy średniej (**sygnał mocy**)  $\Leftrightarrow 0 < P_x < \infty$

$$E_x \in (0, \infty) \Rightarrow P_x = 0$$

$$P_x \in (0, \infty) \Rightarrow E_x = \infty$$

- ✘ klasy sygnałów energii i mocy są **rozłączne**