

# SYGNAŁY I SYSTEMY

## Wykład 3 Szereg Fouriera

Kajetana Snopek

---

# TRYGONOMETRYCZNY SZEREG FOURIERA

Sygnał okresowy o okresie podstawowym  $T_0$ , częstotliwości podstawowej  $f_0$  i pulsacji podstawowej  $\omega_0$  może być przedstawiony w postaci nieskończonej sumy:

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$$

składowa stała

$n$ -ta składowa harmoniczna

$$A_n \geq 0$$

$\{A_0, A_1, A_2, \dots\}$  widmo amplitudowe (jednostronne)

$\{\varphi_1, \varphi_2, \dots\}$  widmo fazowe (jednostronne)

# WIDMO MOCY I TWIERDZENIE PARSEVALA

$$\left\{ A_0^2, \frac{A_1^2}{2}, \frac{A_2^2}{2}, \dots \right\} \quad \text{widmo mocy (jednostronne)}$$

## Marc-Antoine Parseval des Chênes (1755 – 1836)

- matematyk i poeta
- rojalista krytykujący reżim Napoleona Bonaparte
- autor 5 publikacji na temat rachunku różniczkowego i całkowego
- „*Mémoire sur les séries et sur l'intégration complète d'une équation aux différences partielles linéaires du second ordre, à coefficients constants*”  
(5 kwietnia 1799 r. z poprawką z 1801 r.)

$$P_x = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 / 2$$

**Moc sygnału okresowego jest sumą mocy składowej stałej i mocy nieskończenie wielu składowych harmonicznyc**

# SYNTEZA FOURIEROWSKA I EFEKT GIBBSA

Tworzymy sumę sygnału stałego i  $M$  składowych harmonicznymi:

$$x_M(t) = A_0 + \sum_{n=1}^M A_n \cos(n\omega_0 t + \varphi_n)$$

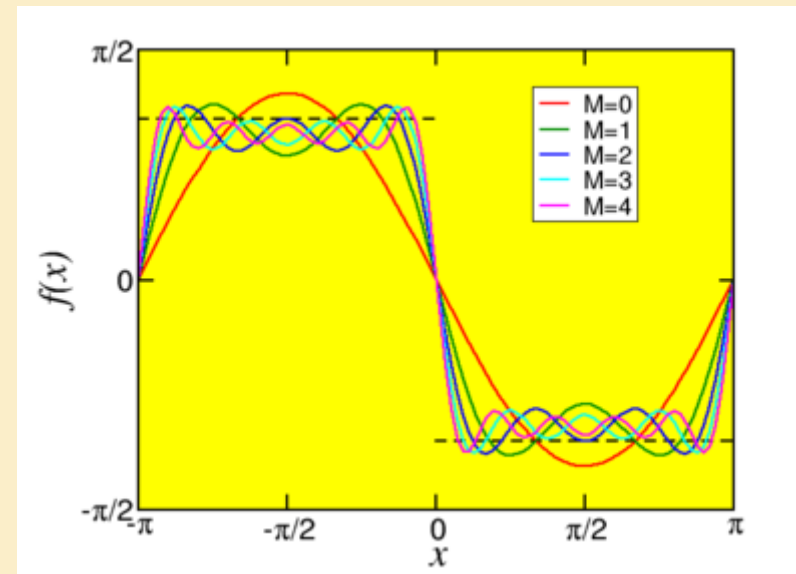
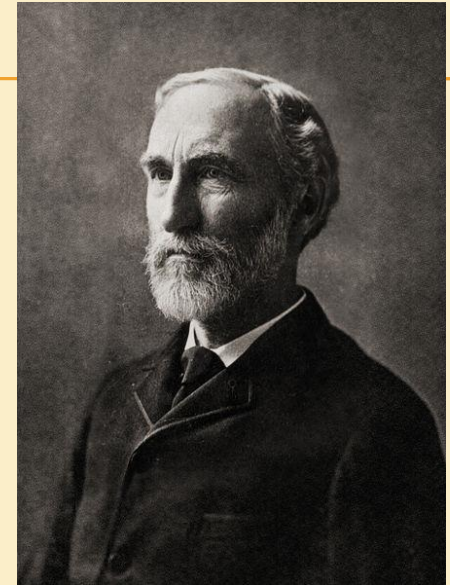
Błąd (średniokwadratowy) takiej aproksymacji równa się sumie mocy pominiętych składowych harmonicznymi:

$$\sigma_M^2 = \sum_{n=M+1}^{\infty} A_n^2 / 2$$

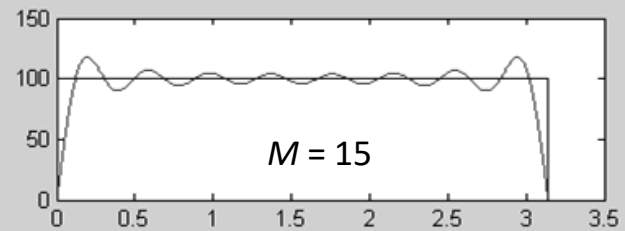
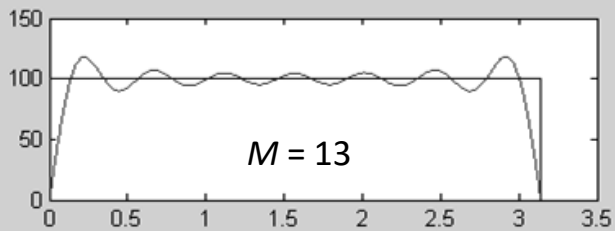
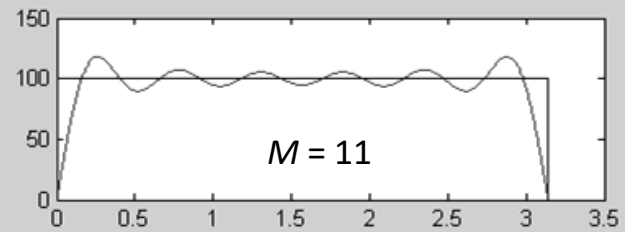
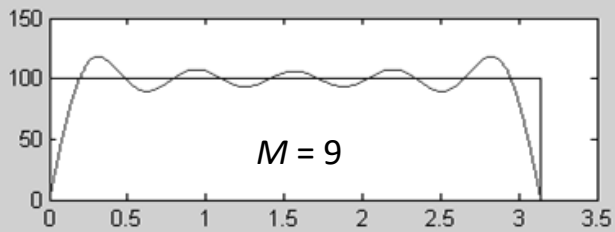
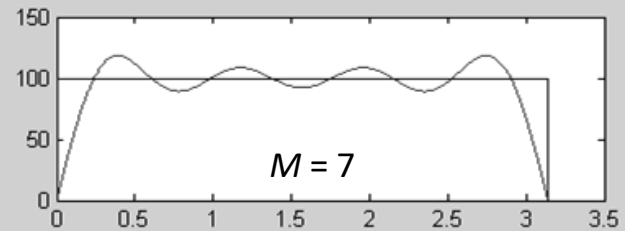
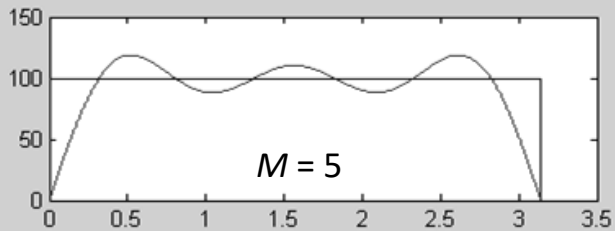
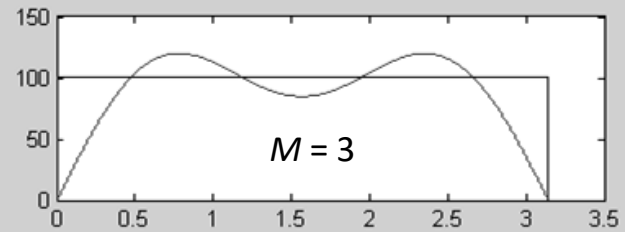
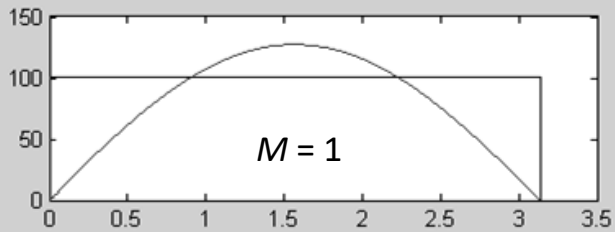
W przypadku syntezy fourierowskiej fali prostokątnej pojawiają się oscylacje o wyższej amplitudzie w otoczeniu punktów nieciągłości - **efekt Gibbsa**

# EFEKT GIBBSA

- 1848 - odkryty przez **Henry'ego Wilbrahama**, który w wieku 22 lat opublikował na ten temat pracę niezauważoną przez środowisko matematyczne
- 1898 - **Albert Abraham Michelson** - skonstruował urządzenie do syntezy fourierowskiej, w którym zaobserwował ten efekt tłumacząc go błędem maszyny
- **1899 - Josiah Willard Gibbs** - opublikowany dowód matematyczny dotyczący natury tego efektu



# EFEKT GIBBSA



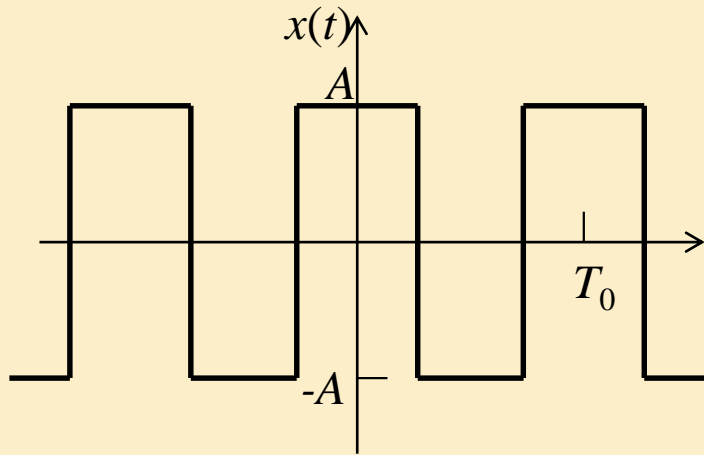
# TRYGONOMETRYCZNY SZEREG FOURIERA – POSTAĆ RÓWNOWAŻNA

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \varphi_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-A_n \sin \varphi_n) \sin(n\omega_0 t)$$

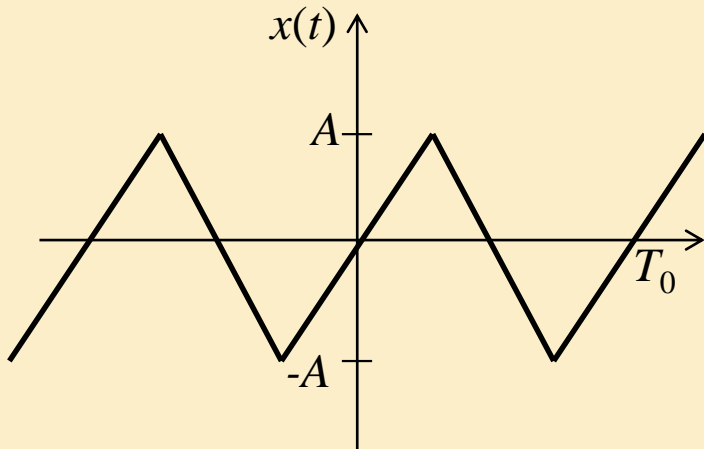
$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

- Dla sygnałów okresowych o symetrii parzystej :  $b_n = 0$
- Dla sygnałów okresowych o symetrii nieparzystej :  $a_n = 0$
- Dla sygnałów okresowych antysymetrycznych (symetrycznych względem osi odciętych t. że  $x(t) = -x\left(t + \frac{T_0}{2}\right)$ ):  $A_0=0$  i szereg Fouriera zawiera tylko składowe nieparzyste

# SZEREG FOURIERA - PRZYKŁADY



$$\frac{4A}{\pi} \left( \cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \dots \right)$$



$$\frac{4A}{\pi} \left( \sin \omega_0 t - \frac{1}{9} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{25} \sin 5\omega_0 t - \dots \right)$$



# WSPÓŁCZYNNIKI TRYGNOMETRYCZNEGO SZEREGU FOURIERA

$$A_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) dt$$

wartość średnia sygnału okresowego

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

współczynniki widma parzystego

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

współczynniki widma nieparzystego

$$\begin{aligned} a_n &= A_n \cos \varphi_n \\ b_n &= -A_n \sin \varphi_n \end{aligned} \iff A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$$

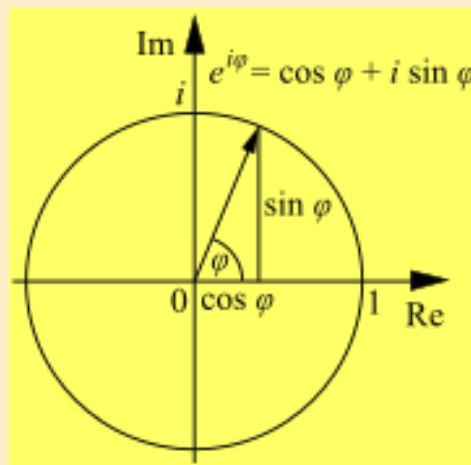
# LEONHARD EULER (1707-1783)



Portret z 1753 r. (aut.  
E. Handmann)

- szwajcarski fizyk i matematyk
- 16 lat – magister filozofii
- 19 lat – doktorat na temat rozchodzenia się dźwięku
- 12- krotny laureat Wielkiej Nagrody Akademii Paryskiej
- obszar zainteresowań: rachunek różniczkowy i całkowy, analiza matematyczna, fizyka
- wprowadził pojęcie i oznaczenie funkcji  $f(x)$
- wprowadził oznaczenia funkcji trygonometrycznych
- wprowadził stałe  $i$ ,  $e$ ,  $\pi$  i symbol  $\Sigma$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$



# „NAJBARDZIEJ NIEZWYKŁY WZÓR W MATEMATYCE”

(Richard Feynman)

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

- Wzór ten łączy w sobie działania potęgowania, mnożenia, dodawania i równości
- Występują w nim wszystkie stałe:  $e$ ,  $i$ ,  $\pi$ ,  $1$ ,  $0$

# SZEREG ZESPOLONY FOURIERA

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

Do szeregu trygonometrycznego wstawiamy wzory Eulera:

$$\cos(n\omega_0 t) = \frac{1}{2} \left( e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t} \right) \quad \sin(n\omega_0 t) = \frac{1}{2j} \left( e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t} \right)$$

$$x(t) = A_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + jb_n) e^{-jn\omega_0 t}$$

$$x(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* e^{-jn\omega_0 t}$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$$

# WSPÓŁCZYNNIKI ZESPOLONEGO SZEREGU FOURIERA

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$c_{-n} = c_n^*$$

$$a_n = 2\operatorname{Re}c_n = c_n + c_{-n}$$

$$b_n = -2\operatorname{Im}c_n = j(c_n - c_{-n})$$

# WIDMO AMPLITUDOWE, FAZOWE I MOCY

$\{|c_n|, n \in \mathbb{Z}\}$  widmo amplitudowe (**parzyste**)

$\{\arg c_n, n \in \mathbb{Z}\}$  widmo fazowe (**nieparzyste**)

$\{|c_n|^2, n \in \mathbb{Z}\}$  widmo mocy (**parzyste**)

Widmo wyznaczone z szeregu zespolonego Fouriera jest **dwustronne**.  
Pojawia się pojęcie **częstotliwości ujemnych**, których nie ma  
w przypadku widma jednostronnego.

$$|c_n| = \frac{A_n}{2} \text{ dla } n \geq 1, A_n \geq 0$$

$$|c_{-n}| = |c_n|$$

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

**Tw. Parsewala**

# WSPÓŁCZYNNIKI CHARAKTERYZUJĄCE SYGNAŁY OKRESOWE NIESINUSOIDALNE

Współczynnik odkształcenia (dla sinusa  $k = 1$ )

$$k = \frac{A_{1_{sk}}}{\sqrt{A_0^2 + A_{1_{sk}}^2 + A_{2_{sk}}^2 + \dots}}, \quad A_{n_{sk}}^2 = \frac{|A_n|^2}{2}$$

Współczynnik zawartości  $k$ -tej harmonicznej

$$\eta_k = \frac{A_{k_{sk}}}{\sqrt{A_0^2 + A_{1_{sk}}^2 + A_{2_{sk}}^2 + \dots}}$$

Współczynnik zawartości harmonicznych (dla sinusa  $h = 0$ )

$$h = \frac{\sqrt{A_2^2 + A_3^2 + \dots}}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 + \dots}} = \frac{\sqrt{A_{2_{sk}}^2 + A_{3_{sk}}^2 + \dots}}{\sqrt{A_{1_{sk}}^2 + A_{2_{sk}}^2 + A_{3_{sk}}^2 + \dots}}$$

# WIDMO SYGNAŁU OKRESOWEGO

- Sygnał okresowy ma widmo dyskretne – **prążkowe**
- Prążki występują na wielokrotnościach częstotliwości (pulsacji) podstawowej
- Widmo wyznaczone z szeregu trygonometrycznego jest **jednostronne** (prawostronne)
- Widmo wyznaczone z szeregu wykładniczego jest **dwustronne**
- Pełna informacja o sygnale jest zawarta w widmie amplitudowym i fazowym – jest możliwa rekonstrukcja sygnału (**synteza fourierowska**)

ale ...



# ale ...

- Szereg Fouriera nie może być bezpośrednio stosowany w praktyce do analizy częstotliwościowej wszystkich sygnałów, gdyż:
  - założono nieskończony czas trwania, a sygnały obserwowane w praktyce mają skończony czas trwania;
  - założono okresowość sygnałów, podczas gdy sygnały rzeczywiste są najczęściej nieokresowe.
  
- Narzędziem uniwersalnym analizy częstotliwościowej jest **ZESPOLONE PRZEKSZTAŁCENIE FOURIERA**



*Karykatura  
przedstawiająca J. Fouriera  
(aut. Julien-Leopold Boilly,  
1820 )*