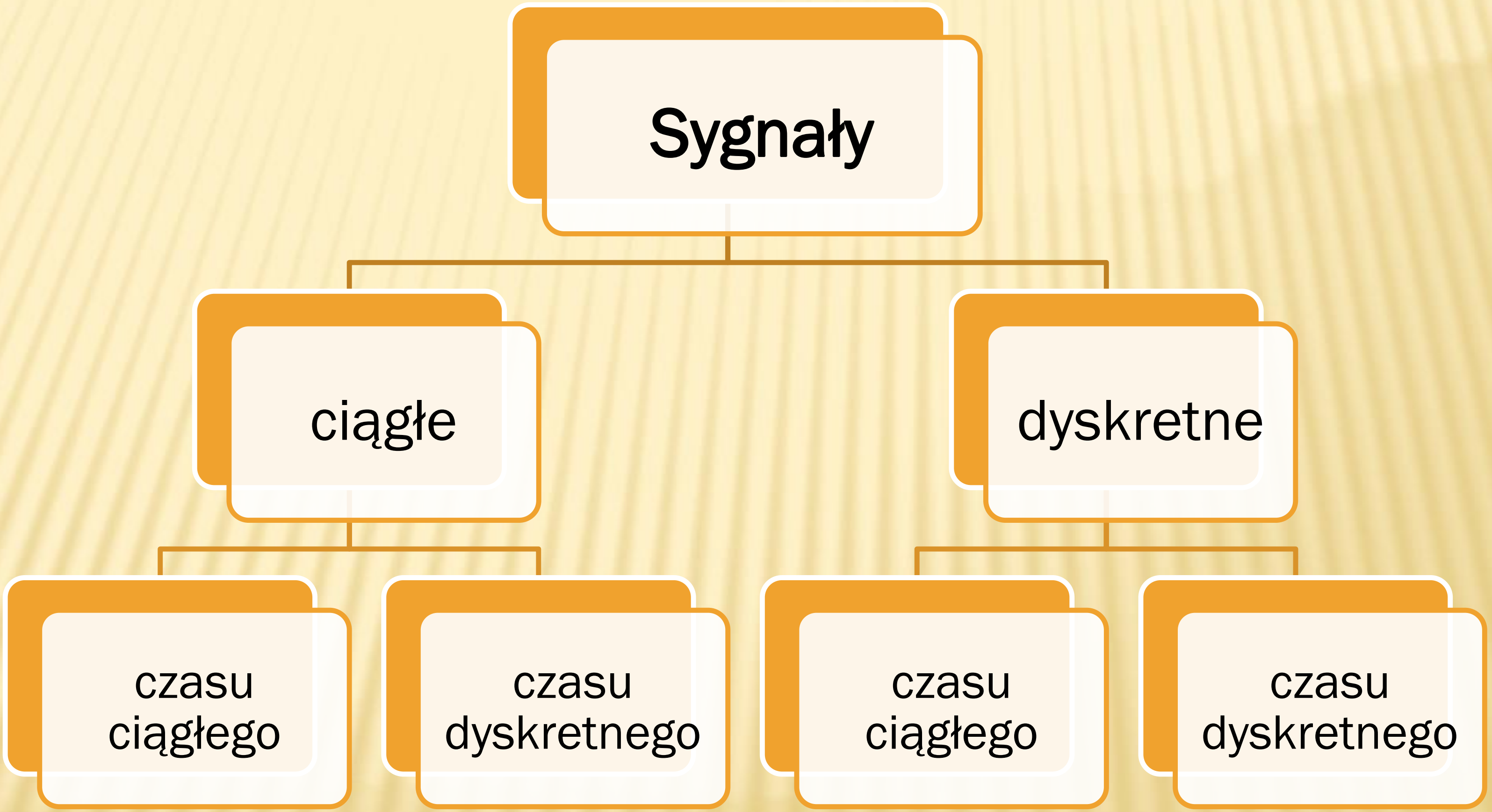
SYGNAŁY I SYSTEMY

Wykład 1
Wprowadzenie do teorii sygnałów

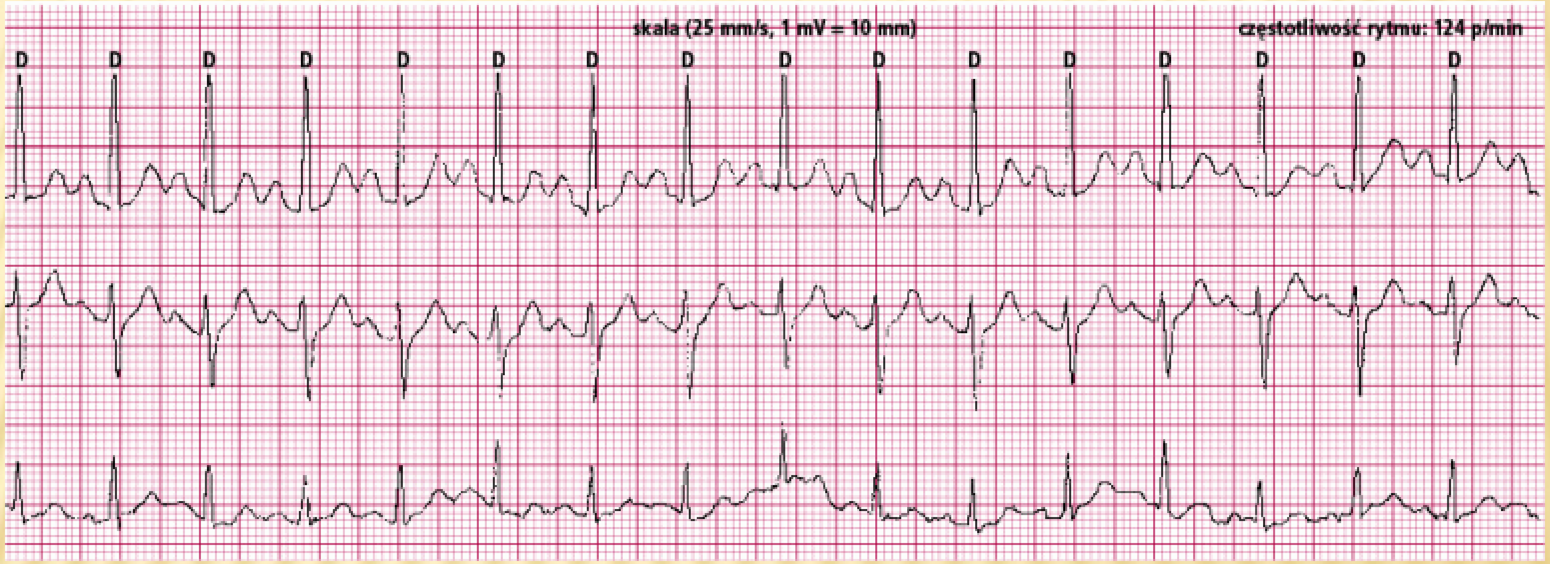
Kajetana Snopek

SYGNAŁY CIĄGŁE I DYSKRETNE



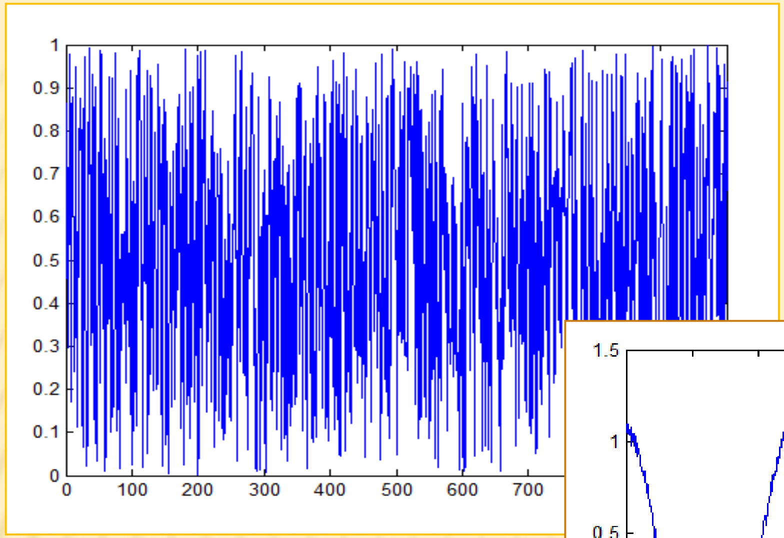
SYGNAŁY CIĄGŁE CZASU CIĄGŁEGO

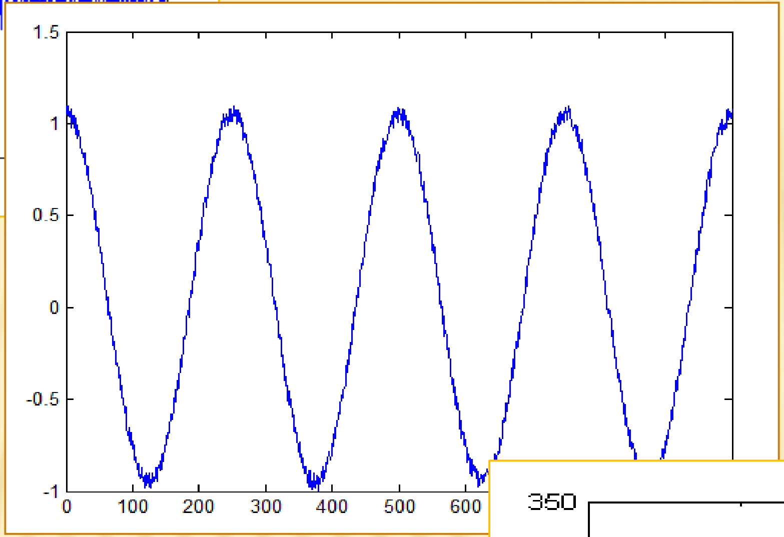
- Przykłady: EKG, EEG, EMG

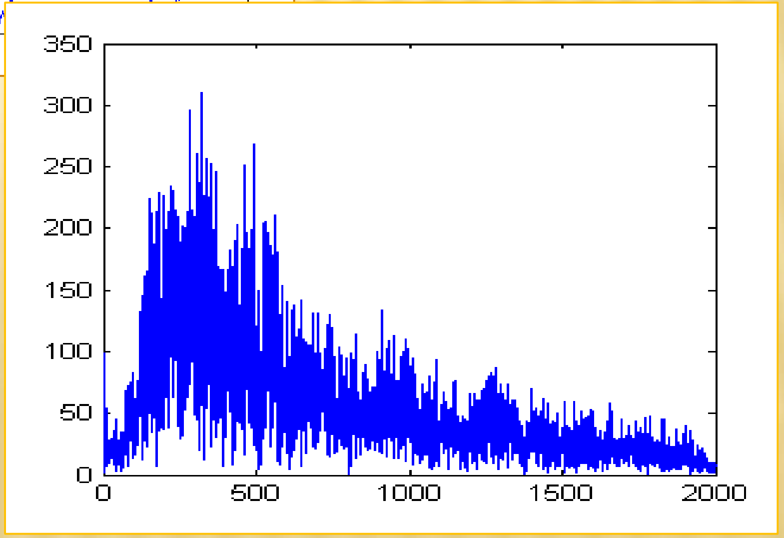


Przykładowa realizacja sygnału EKG (*źródło: www.mp.pl*)

SYGNAŁY LOSOWE CIĄGŁE czasu ciągłego

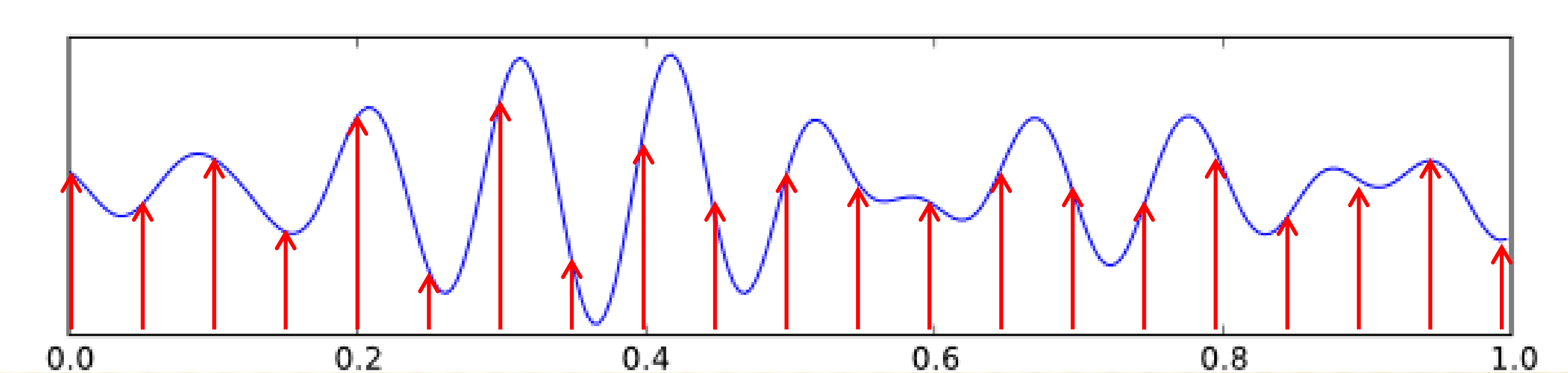






SYGNAŁY CIĄGŁE czasu dyskretnego

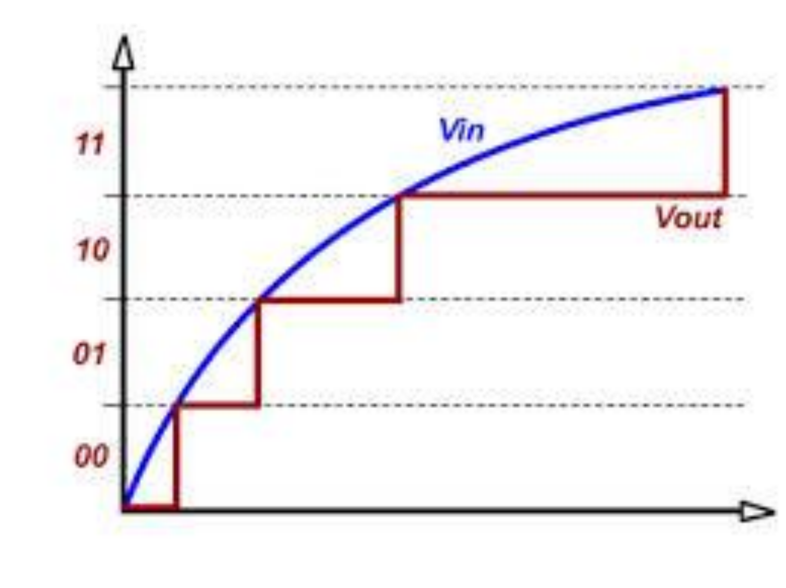
- Przykład: sygnał po próbkowaniu idealnym sygnału analogowego



Przykładowa realizacja sygnału EEG (fala α); kolorem czerwonym zaznaczono sygnał spróbkowany

SYGNAŁY DYSKRETNE czasu ciągłego

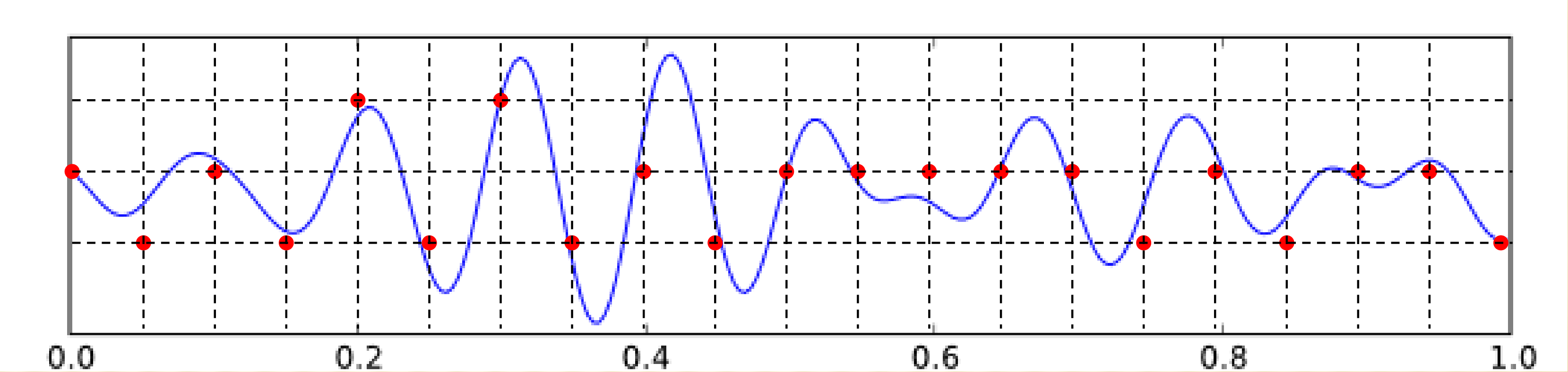
Sygnał schodkowy na wyjściu przetwornika A/C (V_{out})



(źródło: www.physicsforum.com)

SYGNAŁY DYSKRETNE czasu dyskretnego

- Przykład: sygnał spróbkowany idealnie po kwantyzacji równomiernej

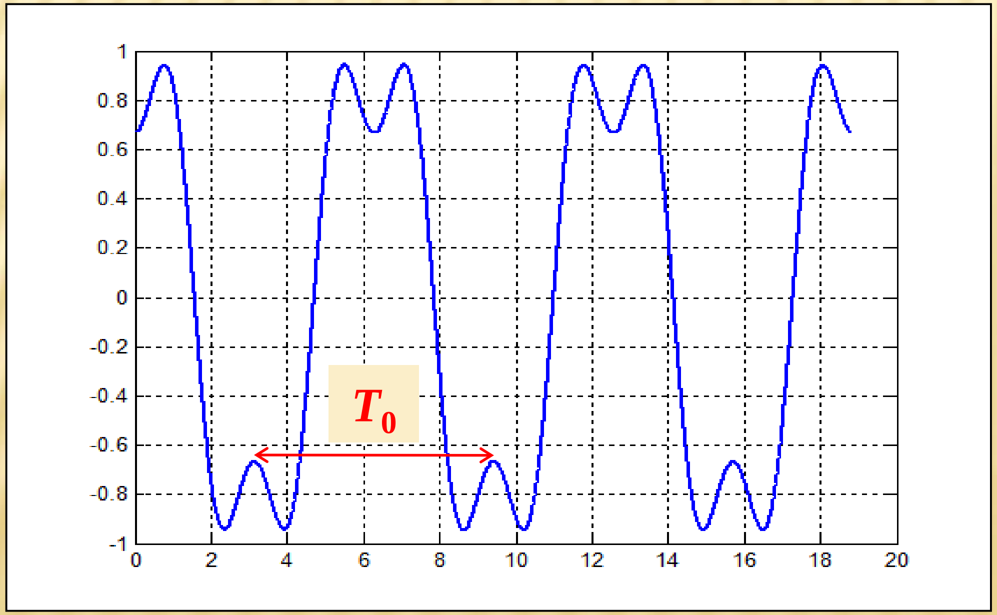


Przykładowa realizacja sygnału EEG (fala α); kolorem czerwonym zaznaczono sygnał skwantowany

SYGNAŁY OKRESOWE

- Sygnał analogowy $x(t)$ jest okresowy jeżeli:

$$\exists T_0 > 0, \forall t \in \mathbb{R} : x(t) = x(t + T_0)$$



T_0 - okres podstawowy

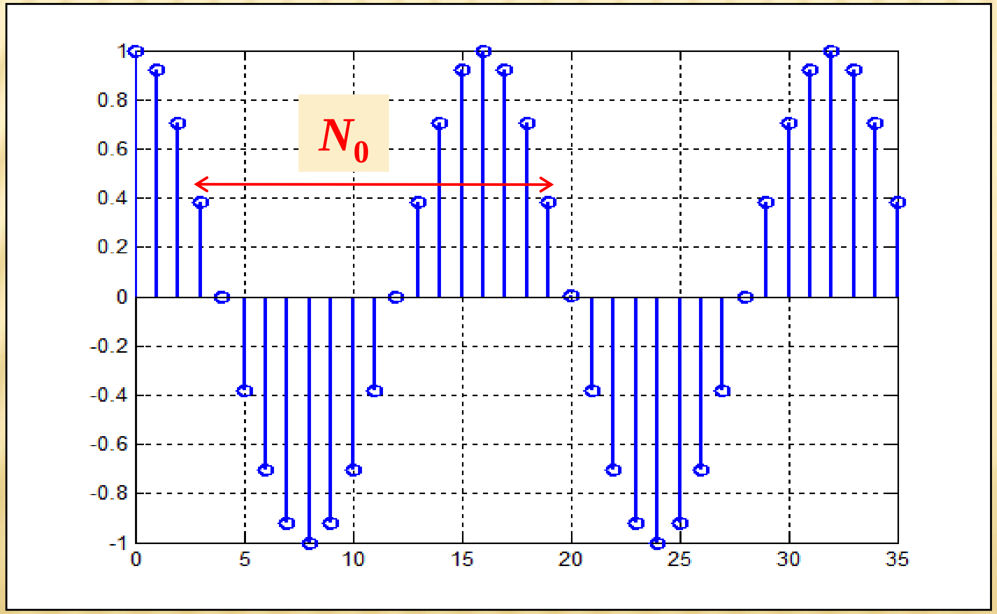
$f_0 = 1/T_0$ – częstotliwość podstawowa

$\omega_0 = 2\pi f_0$ – pulsacja podstawowa

SYGNAŁY OKRESOWE

- Sygnał czasu dyskretnego $x(n)$ jest okresowy jeżeli:

$$\exists N_0 > 0, \forall n \in \mathbb{Z} : x(n) = x(n + N_0)$$



N_0 - okres podstawowy

SYGNAŁ HARMONICZNY

$$x(t) = A\cos\left(2\pi f_0 t + \varphi_0\right) = A\cos\left(\omega_0 t + \varphi_0\right)$$

A	f_0 [Hz]	audio
10	440	
10	523.25	
10	1046.50	

A - amplituda

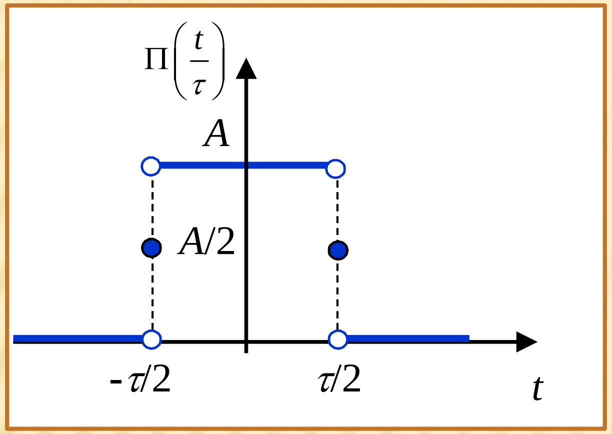
$f_0 = 1/T_0$ – częstotliwość podstawowa

$\omega_0 = 2\pi f_0$ – pulsacja podstawowa

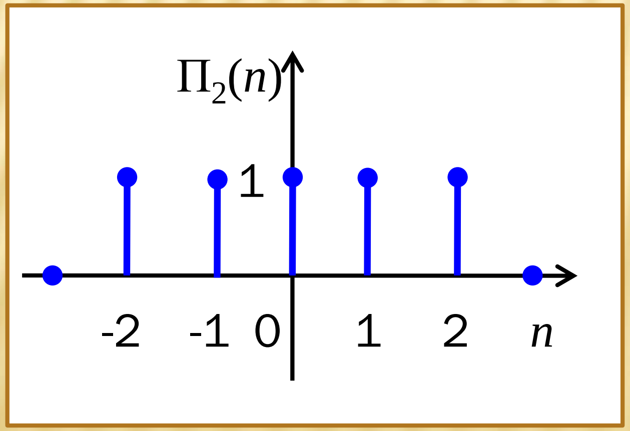
φ_0 – faza początkowa

PRZYKŁADY SYGNAŁÓW

Impuls prostokątny

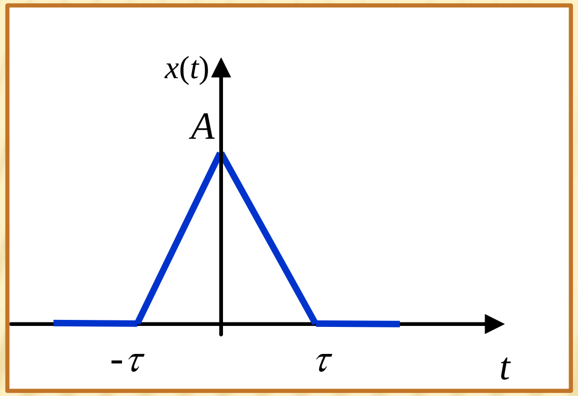


$$x(t) = A\cdot\Pi\left(\frac{t}{\tau}\right) = \begin{cases} A/2, & t = \pm\tau/2 \\ A, & t \in \left(-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right) \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$



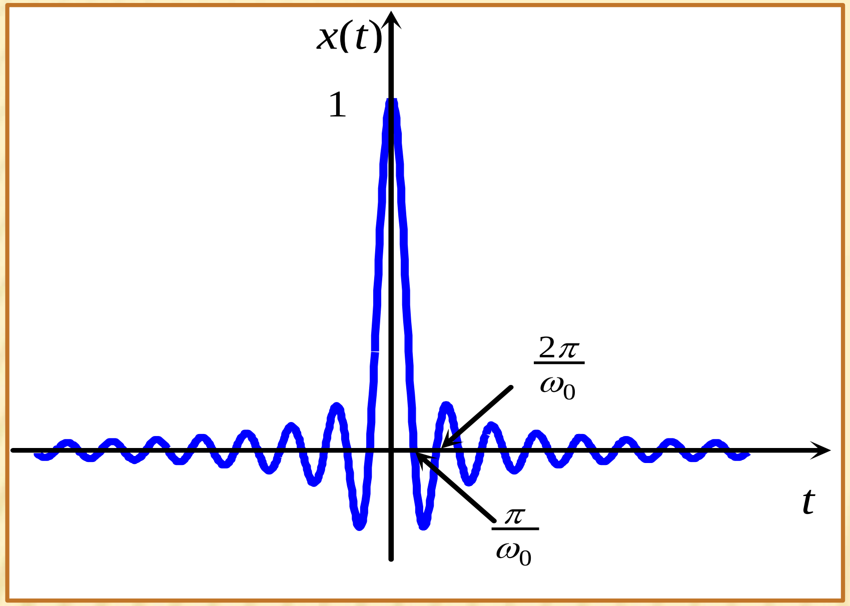
$$\Pi_N(n) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \in [-N, N] \\ 0 & \text{dla } n \notin [-N, N] \end{cases}$$

Impuls trójkątny



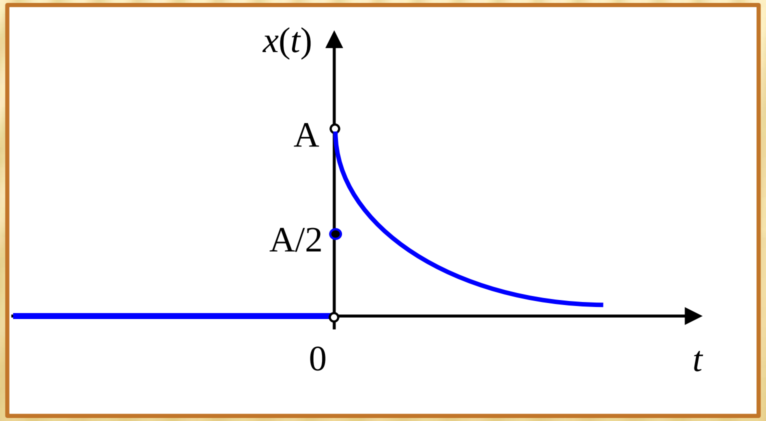
$$x(t) = A \cdot \Lambda\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

Sygnał $\mathrm{Sa}(\omega_0 t)$



$$x(t) = \mathrm{Sa}(\omega_0 t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}$$

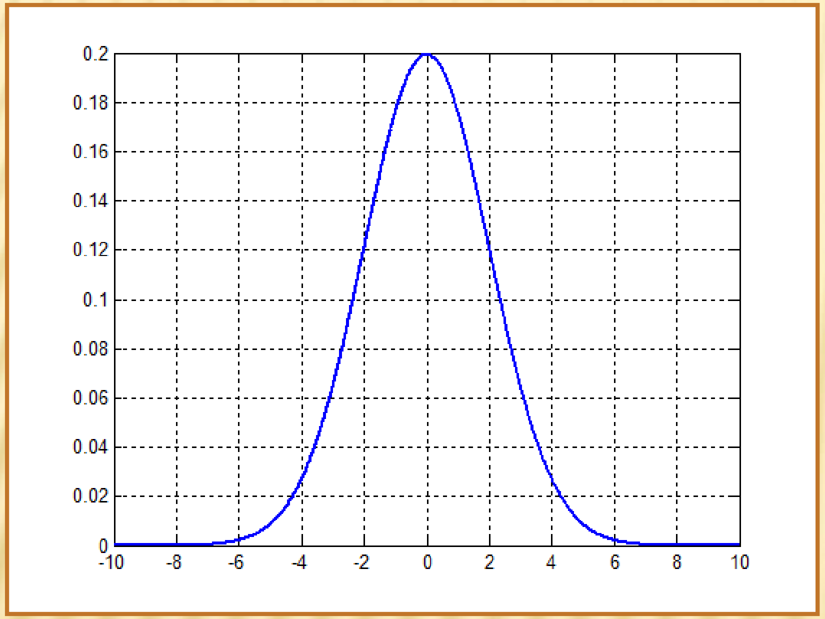
Sygnał wykładniczy jednostronny malejący



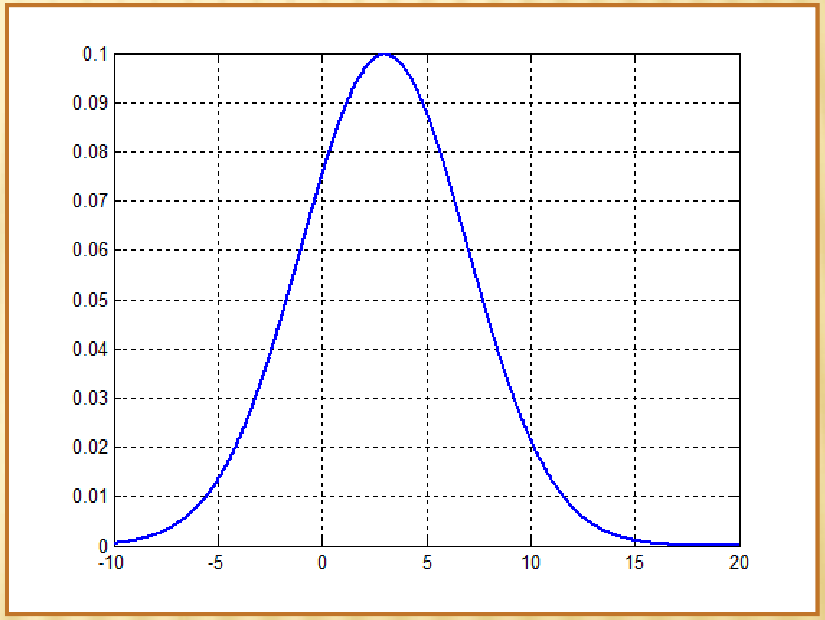
$$x(t) = A \cdot e^{-\alpha t} \cdot \mathbf{1}(t) = \begin{cases} A \cdot e^{-\alpha t}, & t > 0 \\ \frac{A}{2}, & t = 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad , \alpha > 0$$

Sygnał Gaussa

$$g_{\mu,\sigma}(t)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



$g_{0,2}(t)$

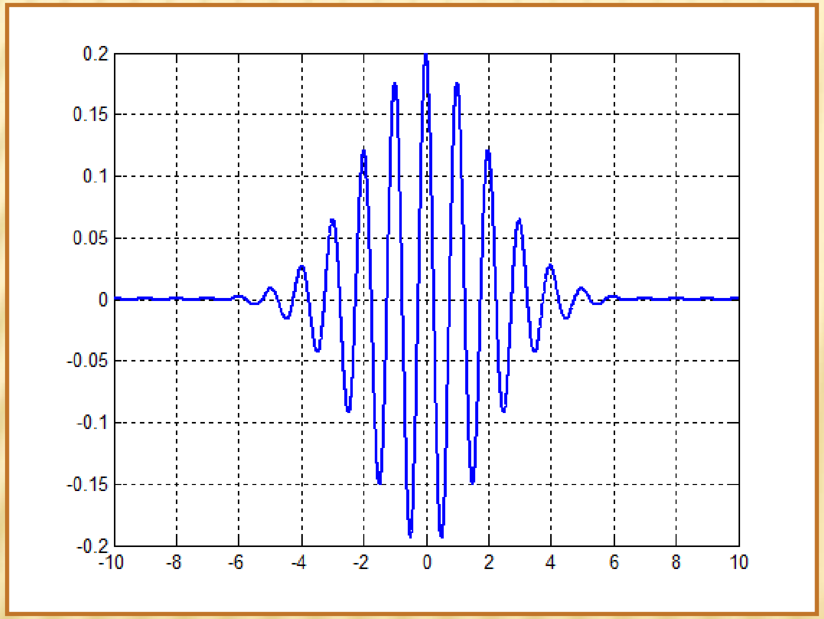


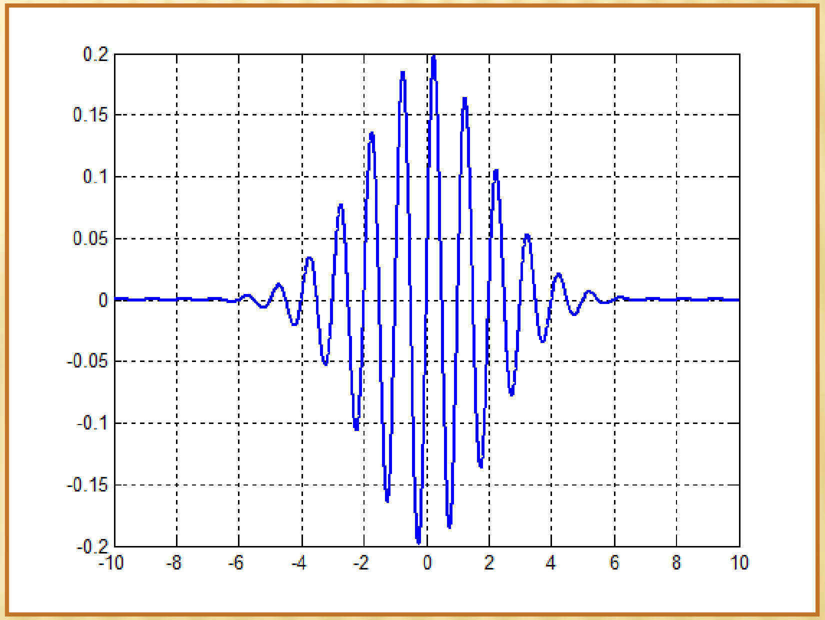
$g_{3,4}(t)$

Sygnał Gabora

$$G_{\mu,\sigma,\omega_0}(t) = g_{\mu,\sigma}(t)e^{j\omega_0 t}$$

$$G_{\mu,\sigma,\omega_0}(t) = g_{\mu,\sigma}(t)\cos(\omega_0 t) + jg_{\mu,\sigma}(t)\sin(\omega_0 t)$$

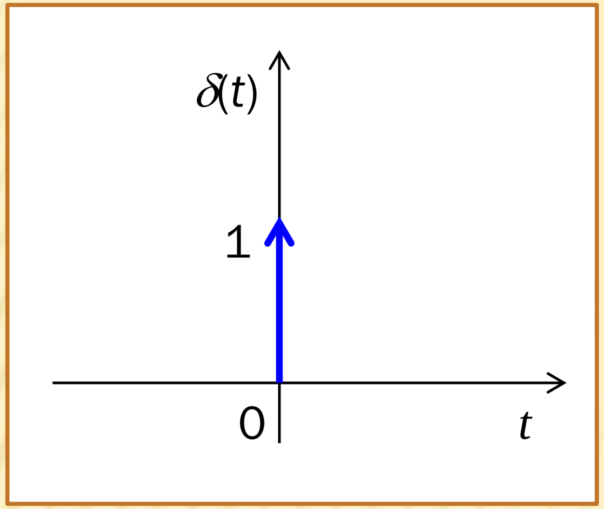




$\operatorname{Re} G_{0,2,2\pi}(t)$

$\operatorname{Im} G_{0,2,2\pi}(t)$

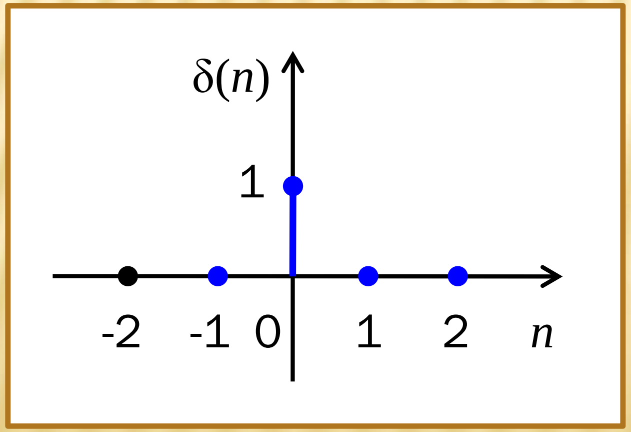
Delta Diraca $\delta(t)$ (p. *Wykład - Sygnały dystrybucyjne*)



$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

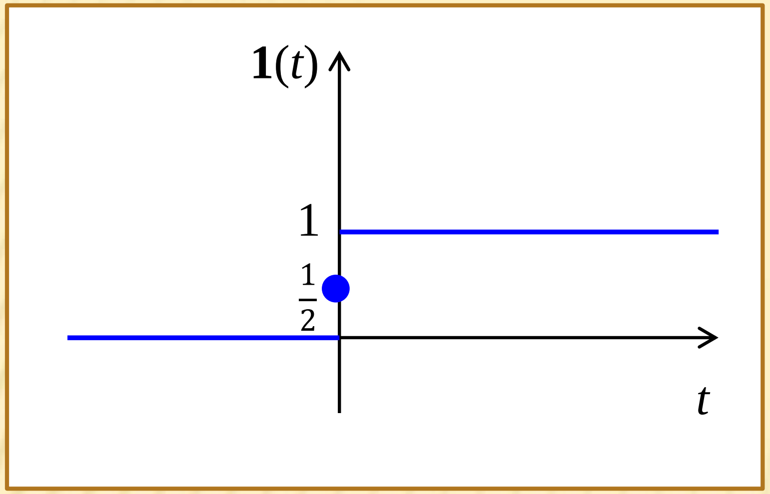
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1 \quad \text{(warunek pola)}$$

Delta Kroneckera $\delta(n)$ (impuls jednostkowy)



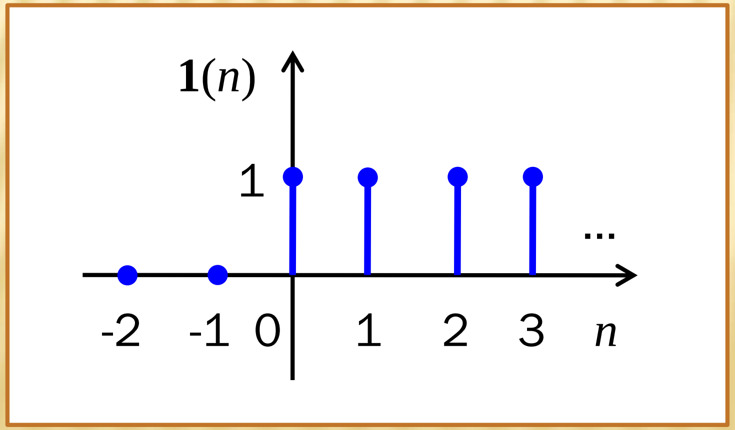
$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$

skok jednostkowy $\mathbf{1}(t)$



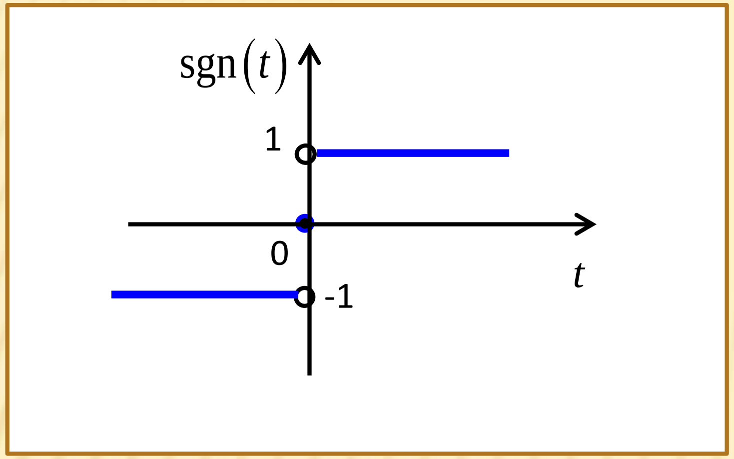
$$\mathbf{1}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ \frac{1}{2}, & t=0\\ 0, & t<0\end{cases}$$

skok jednostkowy $\mathbf{1}(n)$

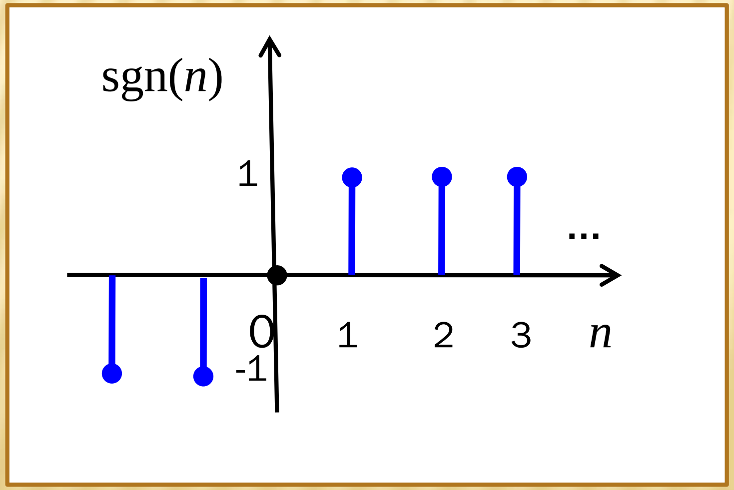


$$\mathbf{1}(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0\end{cases}$$

Sygnał signum $\mathrm{sgn}(t)$

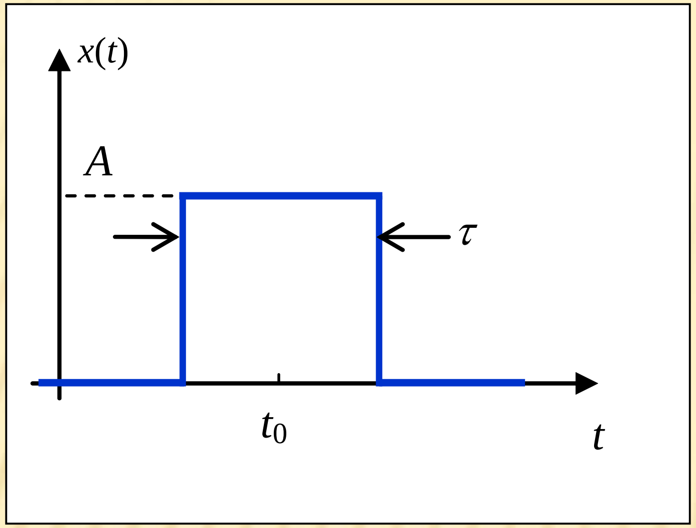


$$\mathrm{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t = 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$

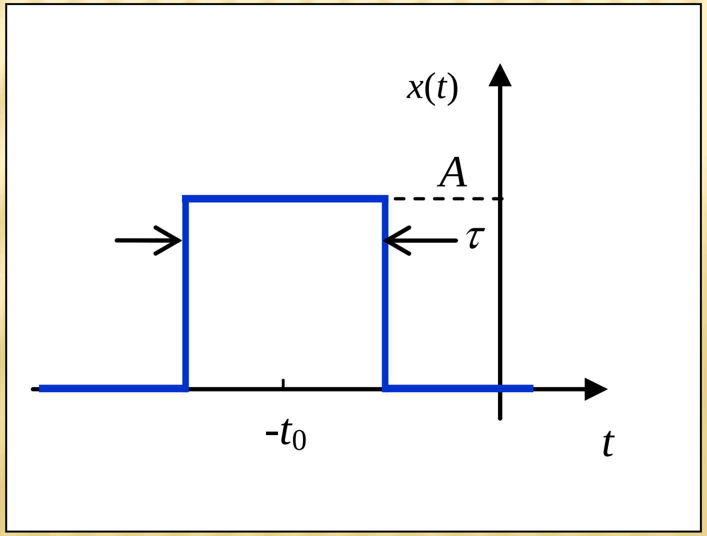


$$\mathrm{sgn}(n) = \begin{cases} 1, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -1, & n < 0 \end{cases}$$

PRZESUNIĘCIE W CZASIE

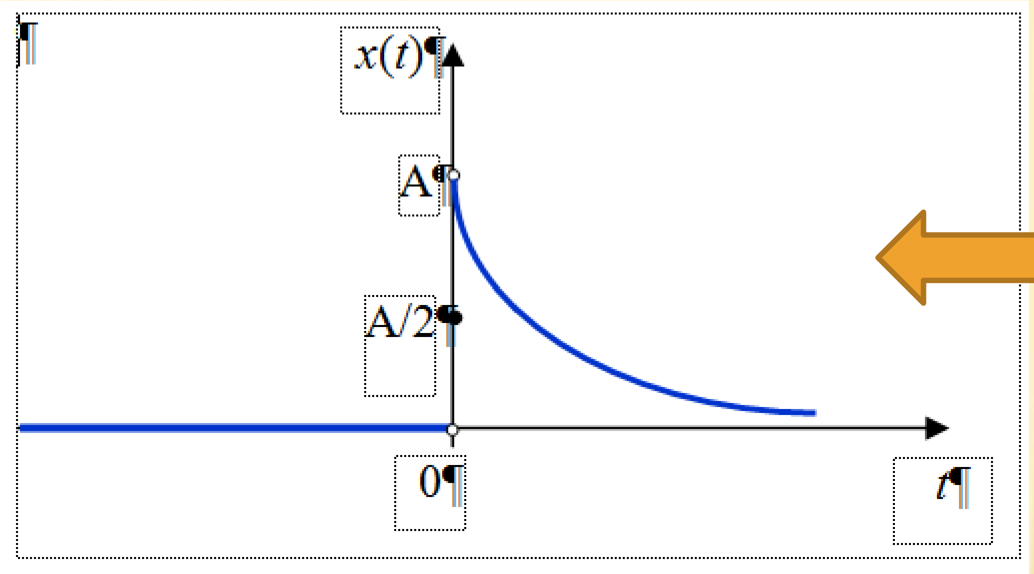


$$x(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t - t_0}{\tau}\right), t_0 > 0$$



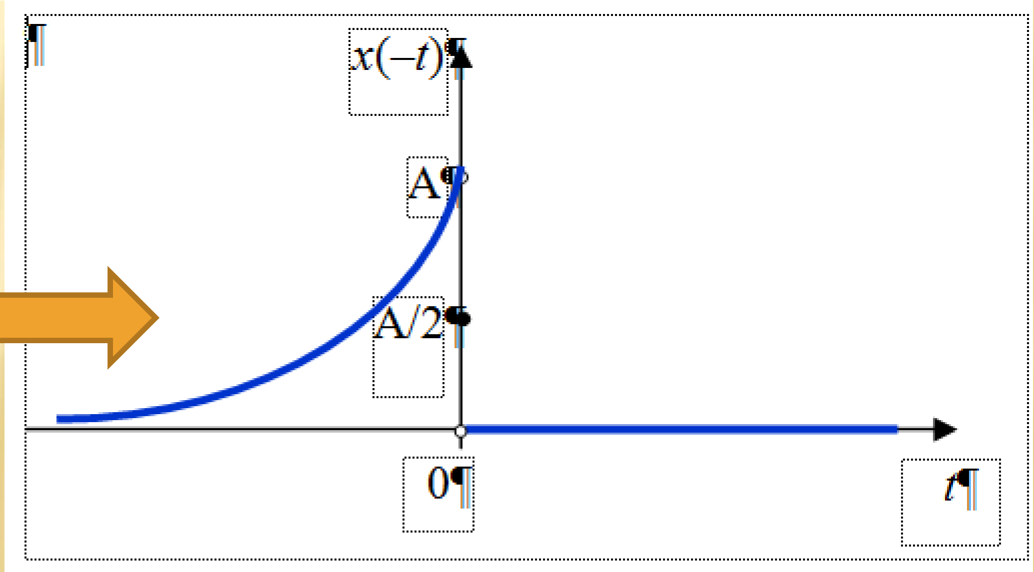
$$x(t) = A \cdot \Pi\left(\frac{t + t_0}{\tau}\right), t_0 > 0$$

INWERSJA CZASOWA

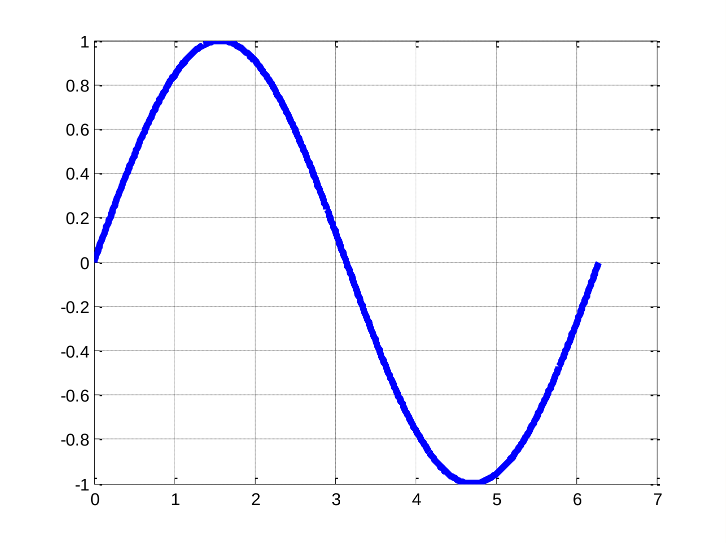


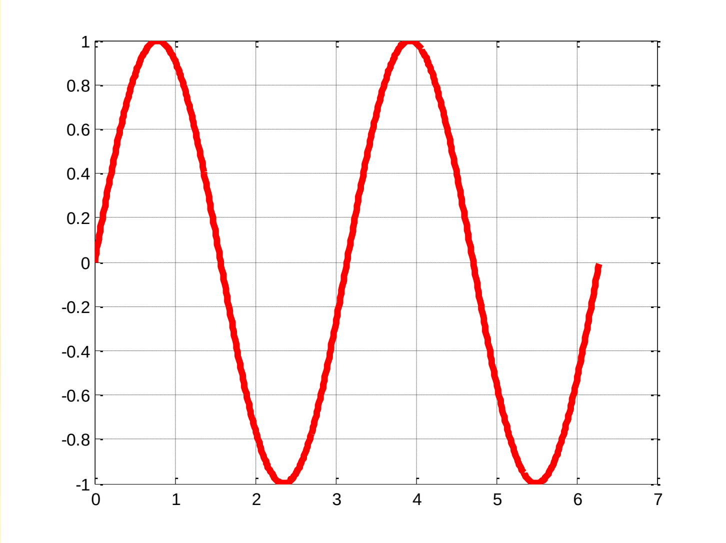
$x(t)$

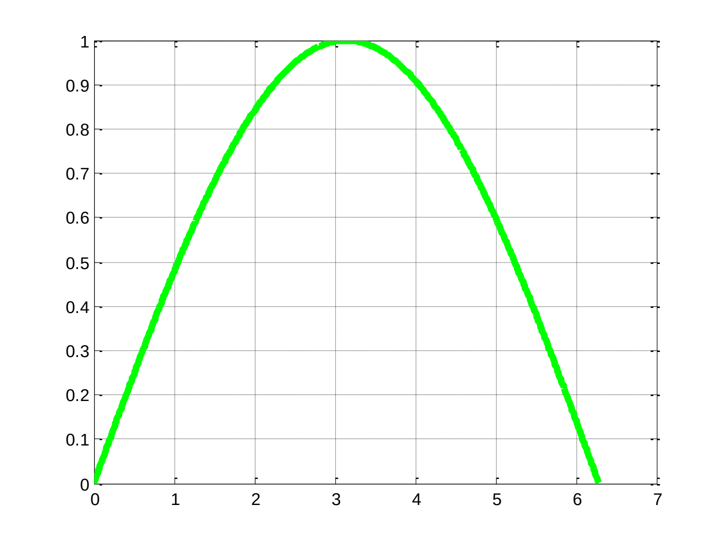
$x(-t)$



SKALOWANIE OSI CZASU







$\sin(t)$

$\sin(2t)$

$\sin(0.5t)$

MNOŻENIE PRZEZ STAŁĄ

$$A \cdot x(t)$$

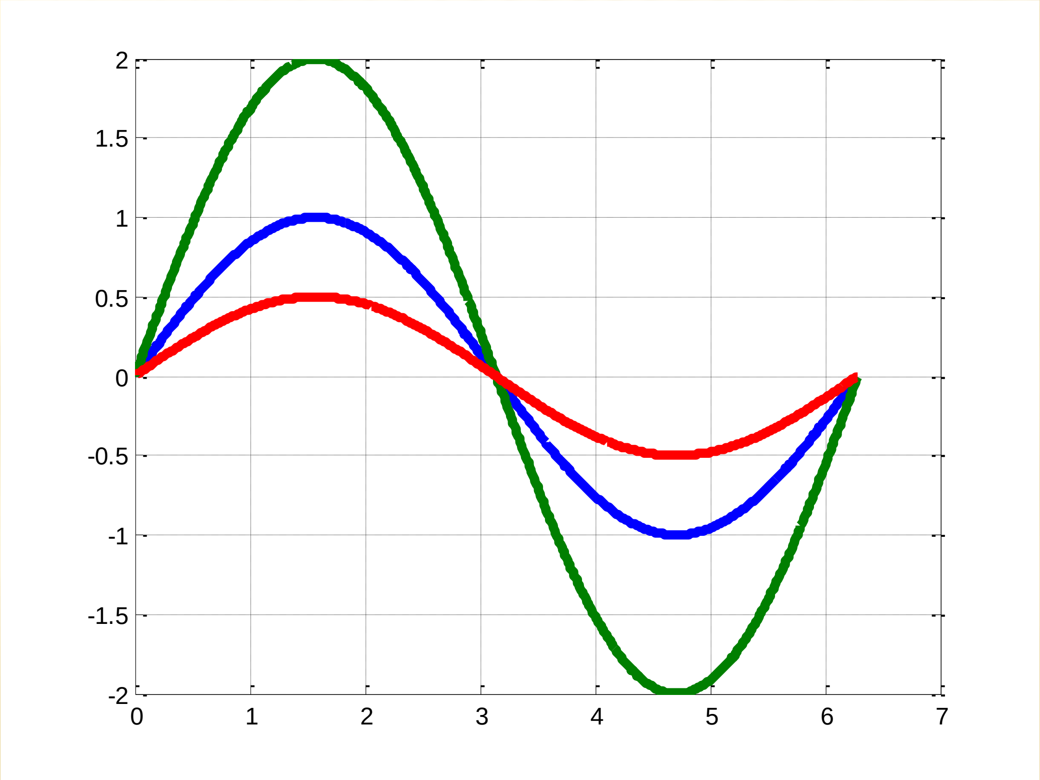
$A > 1$ wzmocnienie sygnalu

$A \in (0,1)$ tlumienie sygnalu

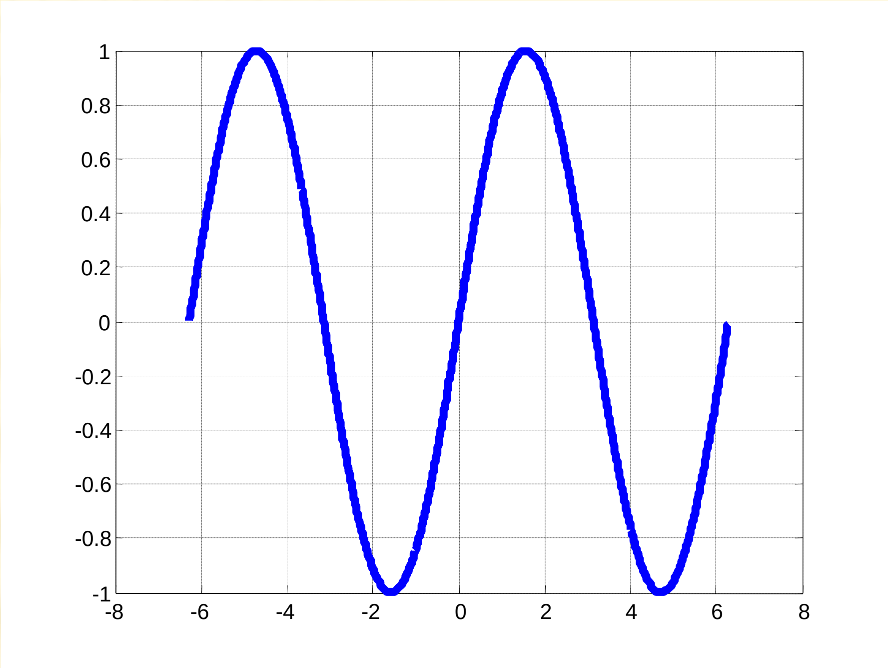
$\sin(t)$

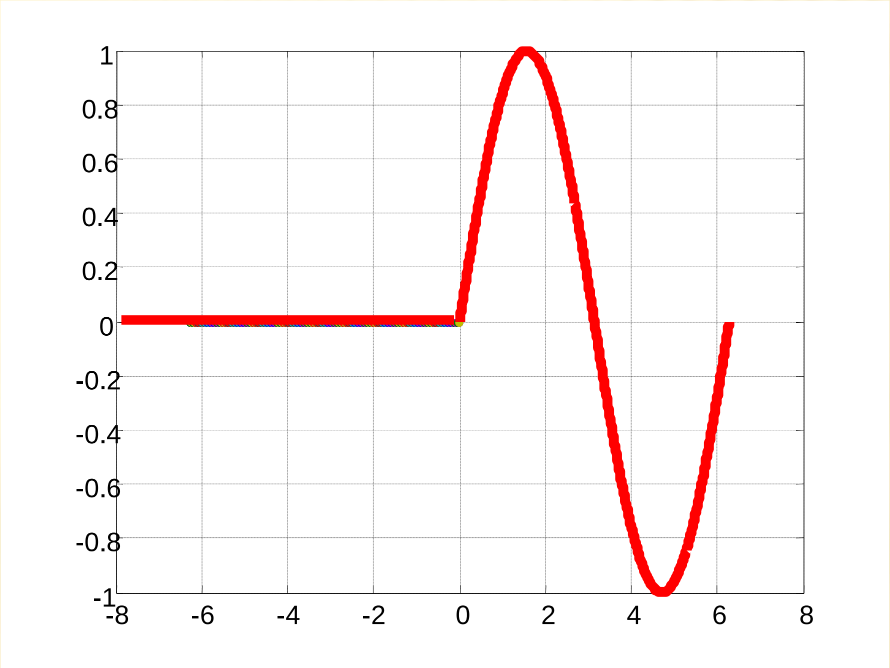
$0.5 \cdot \sin(t)$

$2 \cdot \sin(t)$



MNOŻENIE PRZEZ SKOK JEDNOSTKOWY

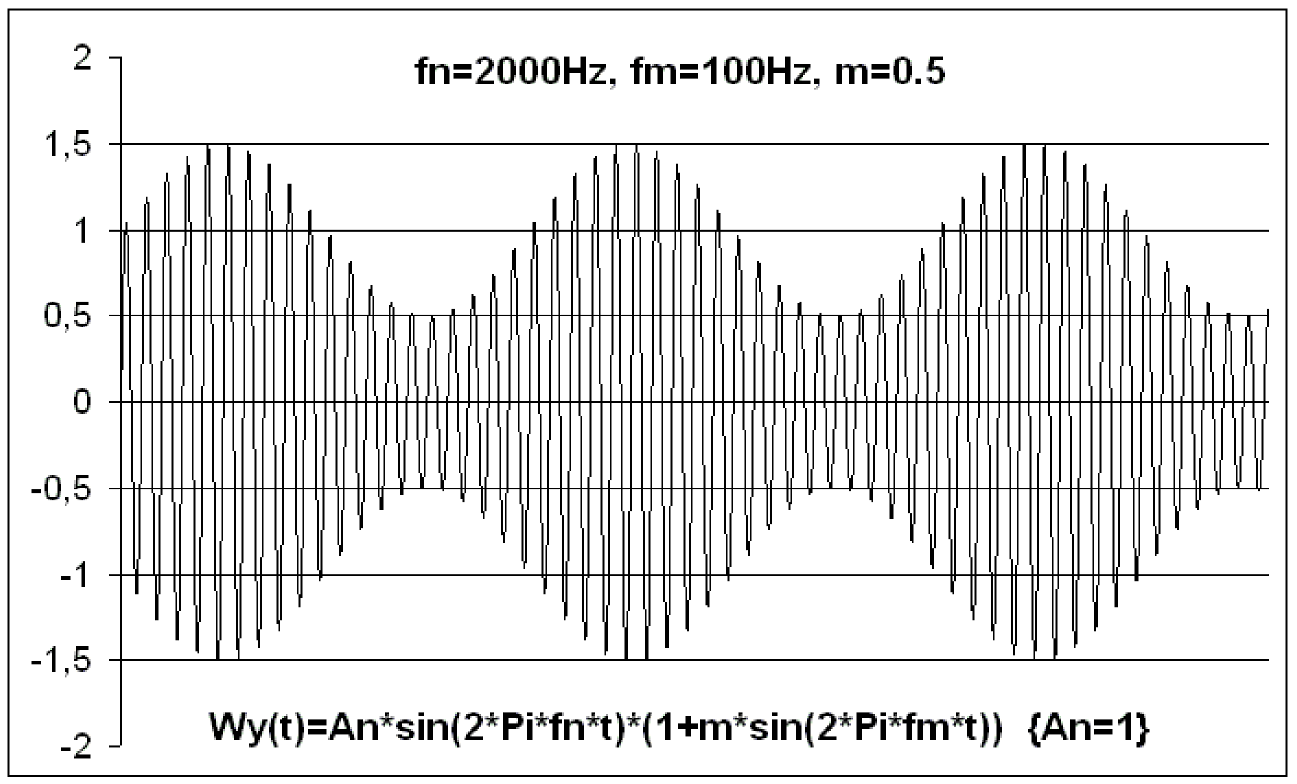




$$\sin(t)$$

$$\sin(t)\cdot\mathbf{1}(t)$$

MODULACJA (AMPLITUDY)



(*źródło: www.elektroda.pl*)

PODSTAWOWE PARAMETRY SYGNAŁÓW

	Sygnały czasu ciągłego	Sygnały czasu dyskretnego
wartość średnia	$\bar{x} = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} x(t)dt$	$\bar{x} = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x(n)$
energia	$E_x = \lim_{\tau\to\infty} \int_{-\tau}^{\tau} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$E_x = \lim_{M\to\infty} \sum_{n=-M}^{M} \lvert x(n)\rvert^2$
moc średnia	$P_x = \lim_{\tau\to\infty} \frac{1}{2\tau} \int_{-\tau}^{\tau} \lvert x(t)\rvert^2 dt$	$P_x = \lim_{M\to\infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} \lvert x(n)\rvert^2$

SYGNAŁY IMPULSOWE

Dla sygnałów $x(t)$ rzeczywistych impulsowych o czasie trwania od t_1 do t_2:

$$\overline{x} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} x(t)\,dt}{t_2 - t_1} \qquad E_x = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,dt$$

Dla sygnałów $x[n]$ rzeczywistych impulsowych o czasie trwania od n_1 do n_2:

$$\overline{x} = \frac{1}{n_2 - n_1 + 1} \sum_{n=n_1}^{n_2} x(n) \qquad E_x = \sum_{n=n_1}^{n_2} x^2(n)$$

SYGNAŁY OKRESOWE

Dla sygnałów $x(t)$ rzeczywistych okresowych o okresie podstawowym T_0:

$$\overline{x} = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x(t)\,dt \qquad\qquad P_x = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} x^2(t)\,dt$$

Dla sygnałów $x(n)$ rzeczywistych okresowych o okresie podstawowym N_0:

$$\overline{x} = \frac{1}{N_0} \sum_{<N_0>} x(n) \qquad\qquad P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{<N_0>} x^2(n)$$

SYGNAŁY ENERGII I MOCY

- sygnał o ograniczonej energii (sygnał energii) $\Leftrightarrow 0 < E_x < \infty$
- sygnał o ograniczonej mocy średniej (sygnał mocy) $\Leftrightarrow 0 < P_x < \infty$
- klasy sygnałów energ

$$E_x \in (0, \infty) \Rightarrow P_x = 0$$

$$P_x \in (0, \infty) \Rightarrow E_x = \infty$$