

POLITECHNIKA WARSZAWSKA  
WYDZIAŁ ELEKTRONIKI I TECHNIK INFORMACYJNYCH  
INSTYTUT RADIOELEKTRONIKI I TECHNIK MULTIMEDIALNYCH

# SYGNAŁY I SYSTEMY (SYGSY)

## ĆWICZENIE 1

Temat: **ANALIZA I SYNTEZA SYGNAŁÓW CZASU CIĄGŁEGO**

OPRACOWALI: DR INŻ. SEBASTIAN KOZŁOWSKI  
DR HAB. INŻ. KAJETANA SNOPEK

WARSZAWA, LUTY 2020

## CEL ĆWICZENIA

- Ilustracja związków między opisem w dziedzinie czasu i częstotliwości dla wybranych sygnałów okresowych czasu ciągłego.
- Aproksymacja sygnału okresowego z wykorzystaniem trygonometrycznego szeregu Fouriera (synteza sygnału okresowego).

## WYMAGANE WIADOMOŚCI TEORETYCZNE

### Szereg trygonometryczny Fouriera

Dany jest sygnał  $x(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , okresowy o okresie podstawowym  $T_0$ , częstotliwości podstawowej  $f_0 = 1/T_0$  i pulsacji podstawowej  $\omega_0 = 2\pi f_0$ . Przebieg ten można przedstawić w postaci sumy składowej stałej  $A_0$  i nieskończonej liczby składowych harmoniczych (1.1):

$$x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \phi_n) \quad (1.1)$$

gdzie  $A_n \geq 0$  jest amplitudą  $n$ -tej składowej harmoniczej,  $n\omega_0 = 2\pi n f_0$  – pulsacją  $n$ -tej harmoniczej i  $\phi_n$  – fazą początkową  $n$ -tej harmoniczej. Przekształcając wzór (1.1) otrzymuje się równoważne rozwinięcie  $x(t)$  względem funkcji harmoniczych  $\cos(n\omega_0 t)$  oraz  $\sin(n\omega_0 t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)] \quad (1.2)$$

o współczynnikach:

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) dt, \quad a_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (1.3)$$

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) \sin(n\omega_0 t) dt \quad (1.4)$$

gdzie  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

Wzory (1.1) i (1.2) nazywane są rozwinięciami sygnału okresowego  $x(t)$  w **trygonometryczny szereg Fouriera**. Parametry obu rozwinięć powiązane są następującymi relacjami:

$$A_0 = a_0, \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (1.5)$$

$$\cos \phi_n = \frac{a_n}{A_n}, \quad \sin \phi_n = -\frac{b_n}{A_n}, \quad n \geq 1 \quad (1.6)$$

**Uwaga:** Jeżeli sygnał  $x(t)$  posiada symetrię parzystą (tzn.  $x(t) = x(-t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ), to wszystkie współczynniki  $b_n$  w rozwinięciu (1.2) są równe 0, natomiast w przypadku sygnału nieparzystego ( $x(t) = -x(-t)$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ ), wszystkie współczynniki  $a_n$  są zerowe.

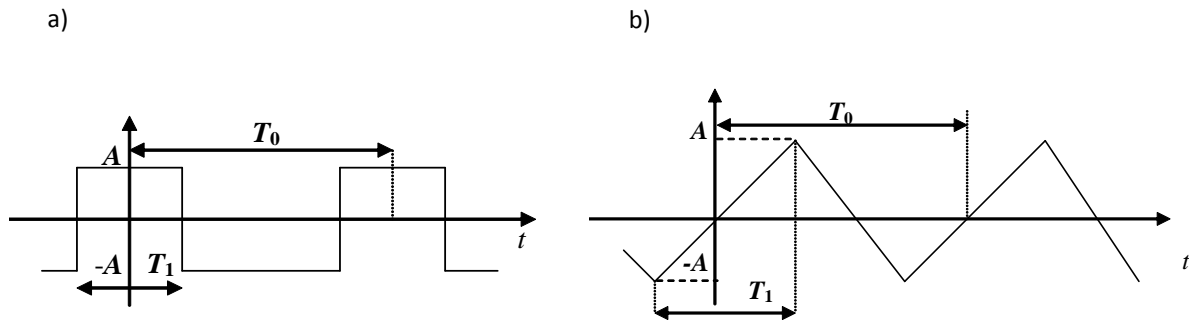
### Przykład 1. Trygonometryczny szereg Fouriera sygnału okresowego prostokątnego i trójkątnego.

Sygnał okresowy bipolarny prostokątny o symetrii parzystej (rys. 1.1a), amplitudzie  $A$  i współczynniku wypełnienia  $d = T_1/T_0$  ( $T_1$  jest czasem trwania impulsu o amplitudzie dodatniej) ma rozwinięcie w trygonometryczny szereg Fouriera (funkcji kosinusoidalnych) postaci:

$$x(t) = A(2d - 1) + \sum_{n=1}^{\infty} 4A \frac{\sin(\pi nd)}{\pi n} \cos(n\omega_0 t) \quad (1.7)$$

Sygnal okresowy bipolarny trójkątny o symetrii nieparzystej (rys. 1.1b), amplitudzie  $A$  i *współczynniku wypełnienia*  $d = T_1/T_0$  ( $T_1$  jest czasem narastania impulsu) ma rozwinięcie w trygonometryczny szereg Fouriera (funkcji sinusoidalnych) postaci:

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2A \frac{\sin(\pi nd)}{\pi^2 n^2 d(1-d)} \sin(n\omega_0 t) \quad (1.8)$$



Rys. 1.1 Bipolarny parzysty sygnał prostokątny a), bipolarny nieparzysty sygnał trójkątny b).

### Zespolony szereg Fouriera

Podstawiając do trygonometrycznego szeregu Fouriera (1.2) znane wzory Eulera:

$$\cos(\alpha) = \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}), \quad \sin(\alpha) = \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \quad (1.9)$$

otrzymuje się rozwinięcie sygnału okresowego  $x(t)$  w **zespolony (wykładniczy) szereg Fouriera**:

$$\begin{aligned} x(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} a_n (e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2j} b_n (e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n - jb_n) e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n + jb_n) e^{-jn\omega_0 t} \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n^* e^{-jn\omega_0 t}, \end{aligned} \quad (1.10)$$

gdzie

$$c_0 = a_0, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n), \quad c_n^* = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) \quad (1.11)$$

Stąd wynikają zależności:

$$a_n = c_n + c_n^* = 2 \operatorname{Re} c_n \quad (1.12)$$

$$b_n = j(c_n - c_n^*) = -2 \operatorname{Im} c_n \quad (1.13)$$

Zespolony szereg Fouriera sygnału okresowego  $x(t)$  (1.10) można przedstawić równoważnie w skróconej postaci:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t} \quad (1.14)$$

gdzie  $c_{-n} = c_n^*$  (p. (1.11)) oraz

$$c_n = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} x(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad t_0 \in \mathbb{R} \quad (1.15)$$

Na podstawie wzorów (1.5) i (1.11) można zauważyć, że parametry rozwinięcia w trygonometryczny szereg Fouriera (1.1) dają się wyrazić jako funkcje współczynników  $c_n$ :

$$A_0 = c_0, \quad A_n = 2|c_n| \quad \text{dla } n \geq 1 \quad (1.16)$$

$$\phi_n = \arg c_n \quad (1.17)$$

### Pojęcie widma sygnału okresowego

**Widmem amplitudowym jednostronnym** (por. wzór (1.1)) nazywamy zbiór amplitud składowej stałej i kolejnych harmonicznych:  $\{A_0, A_1, A_2, \dots\}$ ,  $A_n \geq 0$ . **Jednostronne widmo gęstości mocy** definiuje zbiór  $\{A_0^2, A_1^2/2, A_2^2/2, \dots\}$ , gdzie  $A_0^2$  jest mocą składowej stałej,  $A_n^2/2$  – mocą  $n$ -tej harmonicznej. **Jednostronne widmo fazowe** stanowi zbiór faz początkowych kolejnych harmonicznych:  $\{\phi_1, \phi_2, \dots\}$ .

Zauważmy, że widma sygnałów okresowych są dyskretne (prążkowe), a prążki pojawiają się na częstotliwościach  $n f_0$  będących wielokrotnościami częstotliwości podstawowej sygnału okresowego  $x(t)$ .

**Widmem amplitudowym dwustronnym** sygnału  $x(t)$  (por. wzór (1.14)) nazywamy zbiór  $\{|c_n|, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , **widmem gęstości mocy**:  $\{|c_n|^2, n=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ , natomiast **widmem fazowym**:  $\{\phi_n : \phi_n = \arg c_n, n=\pm 1, \pm 2, \dots\}$ . Moc  $n$ -tej harmonicznej można obliczyć jako sumę odpowiednich prążków dwustronnego widma mocy:  $|c_{-n}|^2 + |c_n|^2$ .

Zauważmy, że w widmie wyznaczonym na podstawie rozwinięcia (1.14) pojawiają się częstotliwości ujemne, których nie ma w przypadku widma wyznaczonego z użyciem wzorów (1.1) i (1.2). Wysokości prążków w widmie amplitudowym dwustronnym (poza prążkiem  $n = 0$  odpowiadającym składowej stałej) są dwukrotnie mniejsze od odpowiednich prążków widma amplitudowego jednostronnego. Ponadto dwustronne widmo amplitudowe oraz widmo mocy mają symetrię parzystą, natomiast dwustronne widmo fazowe jest nieparzyste.

### Twierdzenie Parsewala dla sygnałów okresowych

Rozwinięcia w trygonometryczny (1.1) lub zespolony szereg Fouriera (1.14) pozwalają obliczyć moc średnią za okres lub moc sygnału w zadanym paśmie częstotliwości. Podstawę obliczeń stanowi **twierdzenie Parsewala dla sygnałów okresowych**:

Twierdzenie 1.1: Moc średnia  $P_x$  sygnału okresowego  $x(t)$  obliczona w dziedzinie czasu jako

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} |x(t)|^2 dt, \quad t_0 \in \mathbb{R} \quad (1.18)$$

jest równa sumie mocy składowej stałej i mocy składowych harmonicznych:

$$P_x = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2} \quad (1.19)$$

lub, równoważnie, sumie wszystkich prążków dwustronnego widma gęstości mocy

$$P_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \quad (1.20)$$

Moc sygnału w paśmie częstotliwości  $[-kf_0, kf_0]$  oblicza się na podstawie wzoru (1.20) jako sumę

$$P_{[-kf_0, kf_0]} = \sum_{n=-k}^k |c_n|^2 = A_0 + \frac{A_1^2}{2} + \dots + \frac{A_k^2}{2} \quad (1.21)$$

### Współczynnik zawartości harmonicznych

**Współczynnik zawartości harmonicznych**  $h$  (nazywany również **współczynnikiem zniekształceń harmonicznych**) wyraża stosunek mocy wszystkich harmonicznych z pominięciem pierwszej harmonicznej i składowej stałej do całkowitej mocy sygnału (również z pominięciem składowej stałej). Jest on miarą odkształcenia sygnału od sygnału sinusoidalnego. Można go więc opisać wzorem:

$$h = \sqrt{\frac{\sum_{n=2}^{\infty} |c_n|^2}{\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2}} \quad (1.22)$$

### Synteza sygnału

Zadanie syntezy sygnału okresowego polega na rekonstrukcji sygnału na podstawie jego widma amplitudowego i fazowego. Można je efektywnie rozwiązać przy dostatecznie dużej liczbie składowych harmonicznych  $m$  (teoretycznie przy  $m = \infty$ ). Do oceny dokładności przybliżenia danego przebiegu przez trygonometryczny szereg Fouriera (1.1) mogą służyć zależności energetyczne. Jako miarę przybliżenia przyjmuje się odchylenie średniokwadratowe:

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{T_0} \int_{t_0}^{t_0+T_0} \{x(t) - x_m(t)\}^2 dt, \quad t_0 \in \mathbb{R} \quad (1.23)$$

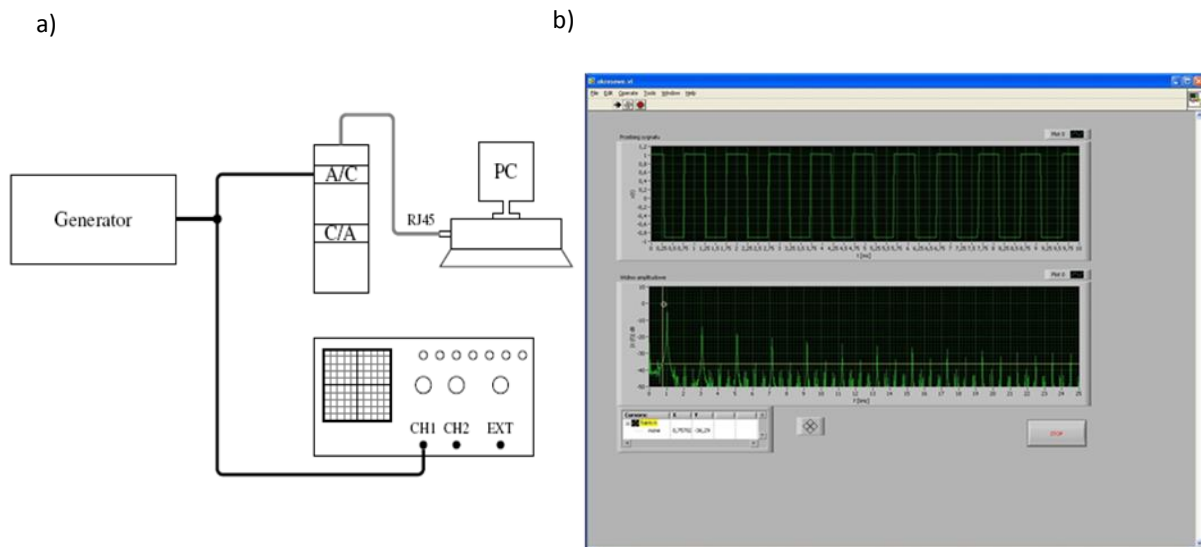
gdzie  $x(t)$  jest szeregiem Fouriera określonym wzorem (1.1), natomiast  $x_m(t)$  – szeregiem zawierającym tylko  $m$  harmonicznych (sumą częściową szeregu Fouriera). Można pokazać, że błąd średniokwadratowy jest równy sumie mocy pominiętych składowych harmonicznych:

$$\sigma_m^2 = 2 \sum_{n=m+1}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{2} \sum_{n=m+1}^{\infty} A_n^2 \quad (1.24)$$

## ZADANIA DOMOWE

- Na podstawie wzorów (1.7) i (1.8) wyznaczyć pierwsze dziesięć prążków jednostronnego widma amplitudowego (w dB i V), fazowego i gęstości mocy następujących sygnałów okresowych o częstotliwości podstawowej  $f_0 = 1$  kHz i amplitudzie  $A = 1$  V:
  - parzystego bipolarnego przebiegu prostokątnego o współczynniku wypełnienia  $d = 1/2$ ,
  - nieparzystego przebiegu trójkątnego,  $d = 1/2$ .
- Dla każdego z powyższych sygnałów obliczyć współczynniki zawartości harmonicznych  $h$  – wzór (1.22), moc średnią za okres  $P_x$  – wzór (1.18) oraz moc zawartą w pierwszych dziesięciu harmonicznych – wzór (1.20).





Rys. 1.3 Układ pomiarowy do obserwacji widma sygnałów okresowych a), okno programu *okresowe.exe* b).

## ZADANIA DO WYKONANIA W LABORATORIUM

### Zadanie 1: Synteza sygnału okresowego

Zestawić układ pomiarowy zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 1.2a. Uruchomić program *synteza.exe* (rys. 1.2b), który umożliwi wprowadzenie wartości amplitud i faz pierwszych dziesięciu (licząc ze składową stałą) składowych harmonicznych oraz syntezę sygnału. Dla sygnału prostokątnego i trójkątnego ( $d=1/2$ ) wykonać następujące czynności:

- Za pomocą gałki ustawić częstotliwość podstawową na wartość wskazaną przez prowadzącego.
- Ustawić wartości wszystkich amplitud i faz na 0. Wyłączyć wszystkie składowe harmoniczne (przełączniki w pozycji „off”).
- Wprowadzić wartości amplitud i faz kolejnych harmonicznych zgodnie z obliczeniami wykonanymi w ramach pracy domowej.
- Włączać kolejne harmoniczne. Po każdym kroku obejrzyć na oscyloskopie przebieg syntezywanego sygnału i porównać go z sygnałem z generatora.

### Zadanie 2: Obserwacja widma sygnałów okresowych

Zestawić układ pomiarowy zgodnie ze schematem przedstawionym na rys. 1.3a. Uruchomić program *okresowe.exe* (rys. 1.3b).

Wygenerować sygnał sinusoidalny o amplitudzie 1 V i częstotliwości 1 kHz. Obejrzyć i skomentować widmo amplitudowe tego sygnału. Następnie dla sygnału prostokątnego i trójkątnego ( $d=1/2$ ) wykonać następujące czynności:

- Ustawić na generatorze wartości amplitudy i częstotliwości takie jak w pracy domowej. Sprawdzić poprawność ustawień na oscyloskopie.
- Sprawdzić, czy wysokość prążka obrazującego pierwszą harmoniczną zgadza się z wartością obliczoną w pracy domowej. W przypadku stwierdzenia istotnych rozbieżności, powiadomić o tym fakcie prowadzącego i postąpić według jego wskazówek.

- Odczytać wartości widma amplitudowego. Przedstawić widmo w postaci wykresu na tle widma obliczonego teoretycznie.
- Na podstawie odczytanych wartości widma amplitudowego wyznaczyć widmo mocy, obliczyć moc zawartą w pierwszych dziesięciu harmonicznych i porównać jej wartość z mocą średnią za okres wyznaczoną w zadaniu domowym.

### **Zadanie 3: Obserwacja widma sygnałów biomedycznych**

Postępując zgodnie ze wskazówkami prowadzącego, wykreślić w środowisku Matlab widma amplitudowe wskazanych sygnałów biomedycznych. Odpowiedzieć na zadane przez prowadzącego pytania.

#### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

- [1] **Snopek, K.M., Wojciechowski, J.M.** Sygnały i systemy – zbiór zadań. Warszawa, Oficyna Wydawnicza PW, 2010.
- [2] **Szabatin, J.** Podstawy teorii sygnałów. Warszawa, WKiŁ, 1990.
- [3] **Wojciechowski, J.** Sygnały i systemy. Warszawa, WKiŁ, 2008