ANALIZA SYGNAŁÓW I SYSTEMÓW W PRAKTYCE

Dyskretne przekształcenie Fouriera (DFT) i algorytm FFT

Kajetana Snopek

N-PUNKTOWA DFT

Sygnał dyskretny reprezentowany przez ciąg N próbek w jednym okresie sygnału $T = NT_s$

$$\{x(n)\} = \{x(0), x(1), \ldots, x(N-1)\}$$

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-jn2\pi f T_s}$$

Dyskretyzacja w dziedzinie częstotliwości $f \rightarrow k\Delta f$

$x(nT_s) = x(n), X(k\,\Delta f) = X_N(k)$

$$\boxed{\Delta f = \frac{f_s}{N}}$$

$$\boxed{X_N(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi kn/N} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{kn}}$$

$$\boxed{W_N = e^{-j2\pi/N}}$$

$$\boxed{x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X_N(k) e^{j2\pi kn/N} = \sum_{k=0}^{N-1} X_N(k) W_N^{-kn}}$$

$$\boxed{x(n) \overset{\text{DFT}}{\Leftrightarrow} X_N(k)}$$

WŁASNOŚCI FUNKCJI W^{kn}

- Ortogonalne

$$\sum_{n=0}^{N-1} W^{kn} W^{-ln} = \begin{cases} N & \text{dla } k = l \\ 0 & \text{dla } k \neq l \end{cases}$$

- Okresowe o okresie N

$$W^{kn} = W^{(k+N)n} = W^{k(n+N)}$$

WIDMO SYGNAŁU

Widmo : $\left\{X_N(k),\ k=0,1,\dots,N-1\right\}$

Widmo amplitudowe: $\left\{\left|X_N(k)\right|,\ k=0,1,\dots,N-1\right\}$

Widmo fazowe: $\left\{\arg X_N(k),\ k=0,1,\dots,N-1\right\}$

Widmo mocy: $\left\{\left|X_N(k)\right|^2,\ k=0,1,\dots,N-1\right\}$

Widmo jest funkcją N-okresową

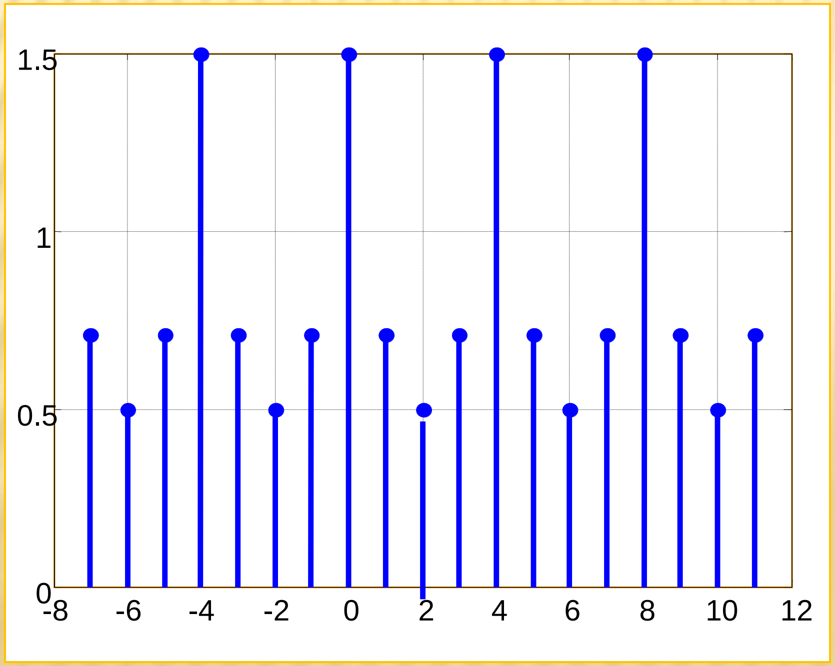
PRZYKŁAD 1

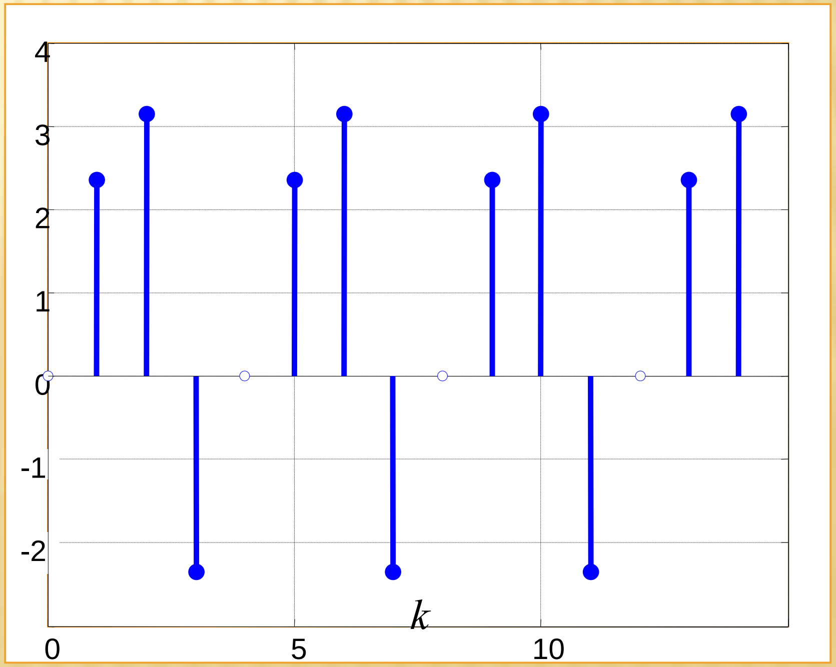
Wyznaczyć 4-punktową DFT sygnału $x(n) = \{0, 1, 2, 3\}$. Narysować wykresy widma amplitudowego i fazowego.

$$X(k) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-j\pi kn/2} = \frac{1}{4}\left\{e^{-j\pi k/2} + 2e^{-j\pi k} + 3e^{-j\pi k3/2}\right\} = \left\{\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}j, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}j\right\}$$

$$|X(k)| = \left\{\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

$$\arg X(k) = \left\{0, \frac{3\pi}{4}, \pi, -\frac{3\pi}{4}\right\}$$





WYBRANE PARY TRANSFORMAT DFT

Sygnał $x(n),\ 0 \le n \le N-1$	**Transformata** $X(k),\ 0 \le k \le N-1$
$\delta(n)$	1
$\delta(n-n_0),\ 0 \le n_0 \le N-1$	$e^{-j2\pi n_0 k/N}$
$e^{j2\pi k_0 n/N},\ 0 \le k_0 < N-1$	$\delta(k-k_0)$
$\mathbf{1}(n)-\mathbf{1}(n-N)$	$\delta(k)$
$\begin{cases} 1, & 0 \le n \le m \\ 0, & m < n \le N-1 \end{cases}$	$\exp\left(j\dfrac{\pi k m}{N}\right)\dfrac{\sin\left[\dfrac{\pi k(m+1)}{N}\right]}{\sin\dfrac{\pi k}{N}}$

WŁASNOŚCI DFT

- Liniowość

Jeżeli $x(n) \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} X(k), y(n) \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} Y(k)$ oraz $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, to:

$$\alpha x(n) + \beta y(n) \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} \alpha X(k) + \beta Y(k)$$

- Okresowość

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \quad x(n) = x(n+N)$$
$$\forall k \in \mathbb{Z}: \quad X(k) = X(k+N)$$

- Symetria dualna

$$X(n) \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{N} x(-k)$$

- Inwersja czasowa

$$x(N-n) \overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow} X(N-k)$$

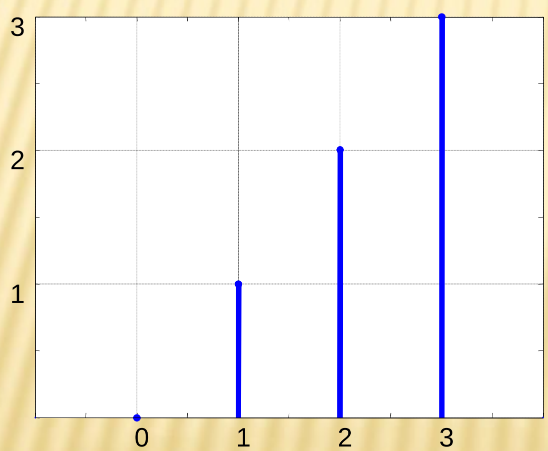
WŁASNOŚCI DFT: PRZESUNIĘCIE CYKLICZNE W CZASIE

$x(n)$ przesuwamy cyklicznie o m w prawo i otrzymujemy sygnał $y(n)$:

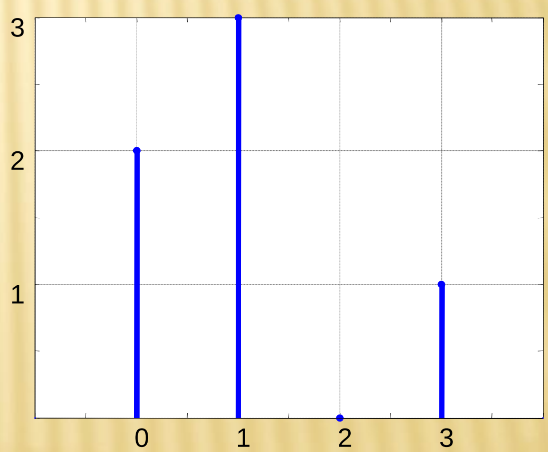
$$\boxed{y(n) = x(n-m)_N = x\big(\mathrm{mod}(n+m, N)\big)}$$

$$\mathrm{mod}(n+m, N) = \begin{cases} n+m, & \text{jeśli} \quad n < N-m \\ n+m-N, & \text{jeśli} \quad n \geq N-m \end{cases}$$

$x(n)$



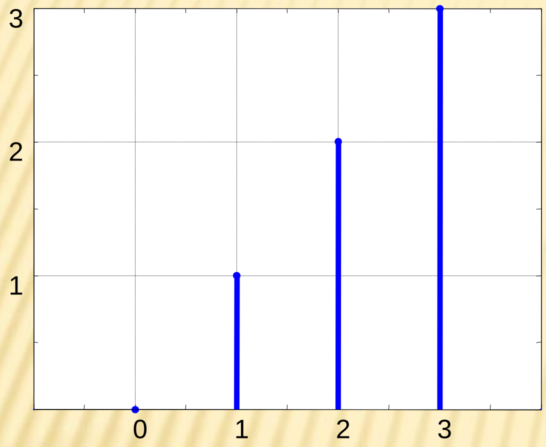
$x(n-2)_4$



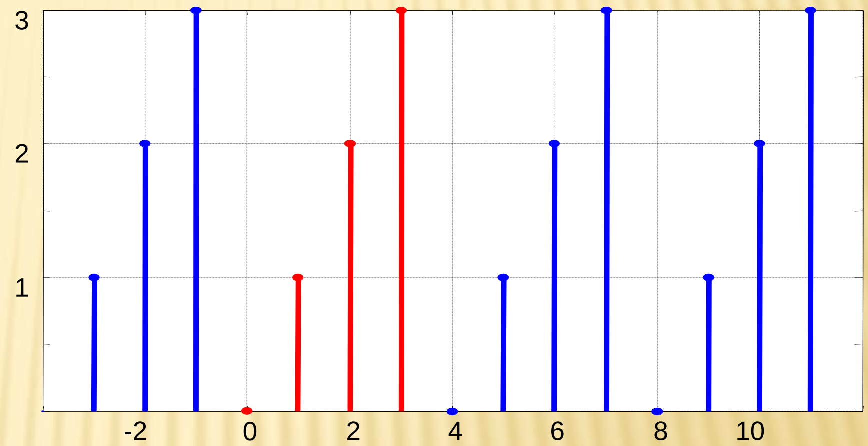
$$x(n-m)_N \overset{\mathrm{DFT}}{\longleftrightarrow} Y(k) = X(k)W^{km}$$

PRZESUNIĘCIE CYKLICZNE W PRAWO

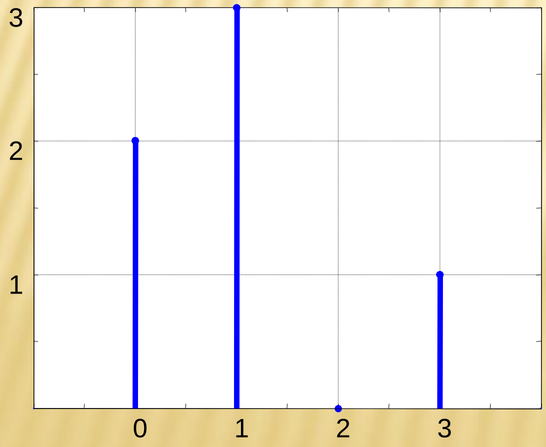
$$x(n)$$



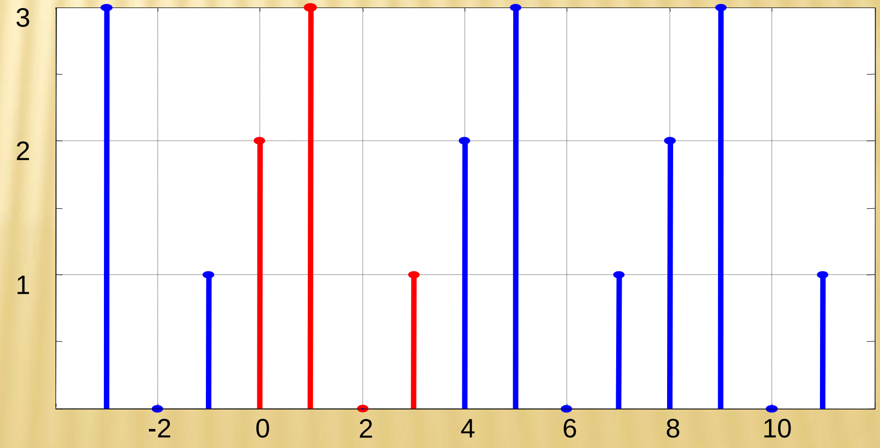
$$y(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(n-4i)$$



$$x(n-2)_4$$



$$y(n-2)$$



WŁASNOŚCI DFT: PRZESUNIĘCIE CYKLICZNE W DZIEDZINIE CZĘSTOTLIWOŚCI

$X(k)$ przesuwamy cyklicznie o l w prawo i otrzymujemy widmo $Y(k)$:

$$\boxed{Y(k) = X(k-l)_N = X\big(\mathrm{mod}(k+l, N)\big)}$$

$$\boxed{y(n) = x(n)W^{-nl} \overset{\mathrm{DFT}}{\longleftrightarrow} X(k-l)_N}$$

WŁASNOŚCI DFT: SPLOT, ILOCZYN, RÓWNOŚĆ PARSEVALA

- Splot kołowy (cykliczny) $\frac{1}{N}x(n)\otimes y(n)\overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow}X(k)Y(k)$,

gdzie splot kołowy ⊗ definiujemy jako:

$$x(n)\otimes y(n)=\sum_{m=0}^{N-1}x(m)y(n-m)_N, n=0,1,\dots,N-1$$

$$y(-n)_N=\begin{cases} y(0) & \text{dla} \quad n=0 \\ y(N-n) & \text{dla} \quad n=0,1,2,\dots,N-1\end{cases}$$

- Iloczyn $x(n)y(n)\overset{\text{DFT}}{\longleftrightarrow}X(k)\otimes Y^{\star}(k)$
- Równość Parsevala

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\sum_{n=0}^{N-1}|X(k)|^2$$

PRZYKŁAD 2

Wyznaczyć 4-punktowe DFT sygnałów $x(n)$ i $y(n)$ zdefiniowanych następująco:
$x(n) = \{2, 0, 1, 0\}$, $y(n) = \{3, 2, 1, 0\}$ i zweryfikować twierdzenie o splocie cyklicznym.

- *Obliczamy 4-punktowe DFT sygnałów $x(n)$ i $y(n)$:*

$$X(k) = \tfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} x(n) e^{-j\pi kn/2} = \tfrac{1}{4}\left(2 + e^{-j\pi k}\right) = \left\{\tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{3}{4}, \tfrac{1}{4}\right\}$$

$$Y(k) = \tfrac{1}{4}\sum_{n=0}^{3} y(n) e^{-j\pi kn/2} = \tfrac{1}{4}\left(3 + 2e^{-j\pi k/2} + e^{-j\pi k}\right) = \left\{\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}j, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}j\right\}$$

- *Obliczamy iloczyn widm $X(k)$ i $Y(k)$ i odwrotną DFT:*

$$X(k)Y(k) = \left\{\tfrac{9}{8}, \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8}j, \tfrac{3}{8}, \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{8}j\right\}$$

$$\mathrm{DFT}^{-1}\left\{X(k)Y(k)\right\} = \sum_{k=0}^{3} X(k)Y(k) e^{j\pi nk/2} = \left\{\tfrac{7}{4}, 1, \tfrac{5}{4}, \tfrac{1}{2}\right\}$$

PRZYKŁAD 2 – CIĄG DALSZY

- *Obliczamy splot cykliczny sygnałów x*(*n*) *i y*(*n*)*:*

$$x(n)\otimes y(n)=\sum_{m=0}^{3}x(m)\,y(n-m)_4=$$
$$=x(0)\,y(n)_4+x(1)\,y(n-1)_4+x(2)\,y(n-2)_4+x(3)\,y(n-3)_4$$
$$=\{7,4,5,2\}$$

- *Ostatecznie mamy:*

$$\frac{1}{4}x(n)\otimes y(n)\overset{\mathrm{DFT}}{\Leftrightarrow}X(k)\,Y(k)$$

PRZECIEK WIDMA

- Jeżeli w DFT pojawiają się składowe nie występujące w widmie sygnału analogowego, to zjawisko takie nosi nazwę *przecieku widma*.
- Jedną z metod redukcji przecieku widma jest zastosowanie *okienkowania* sygnału w dziedzinie czasu z oknem $w(n)$.

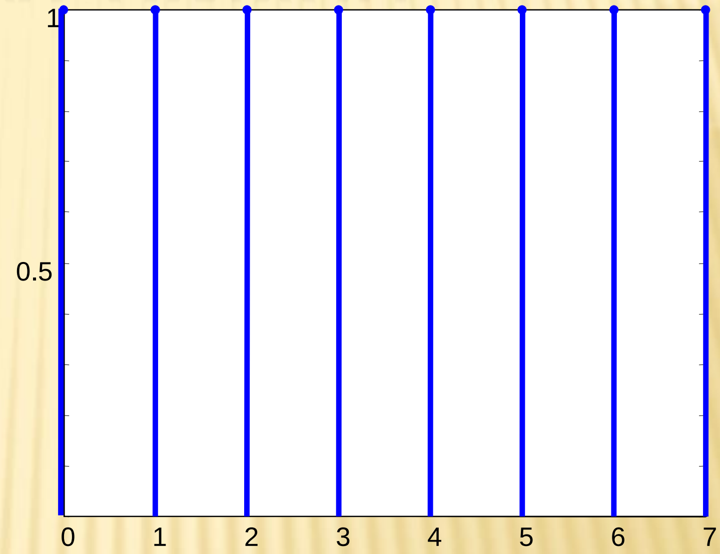
- DFT sygnału okienkowanego:

$$X_w(k) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)\,x(n)\,e^{-j2\pi kn/N}$$

PRZYKŁADY OKIEN CZASOWYCH

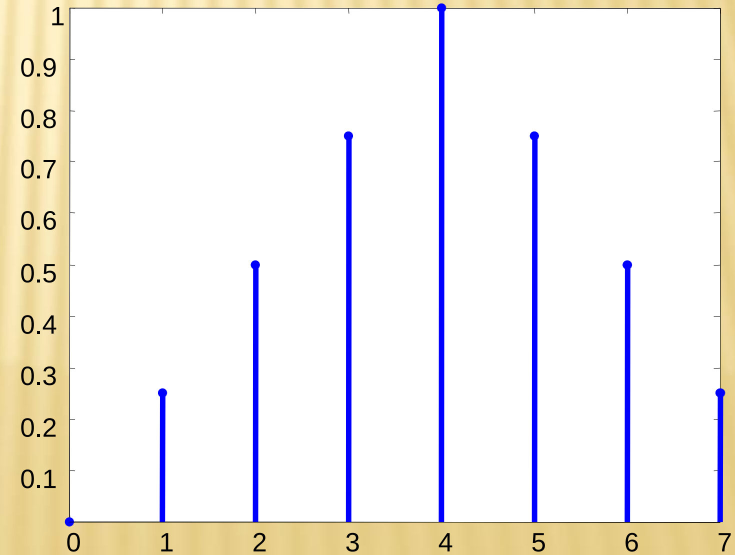
- Okno prostokątne

$$w(n)=\begin{cases}1, & n=0,1,\ldots,N-1\\ 0, & \text{w p. p.}\end{cases}$$



- Okno trójkątne

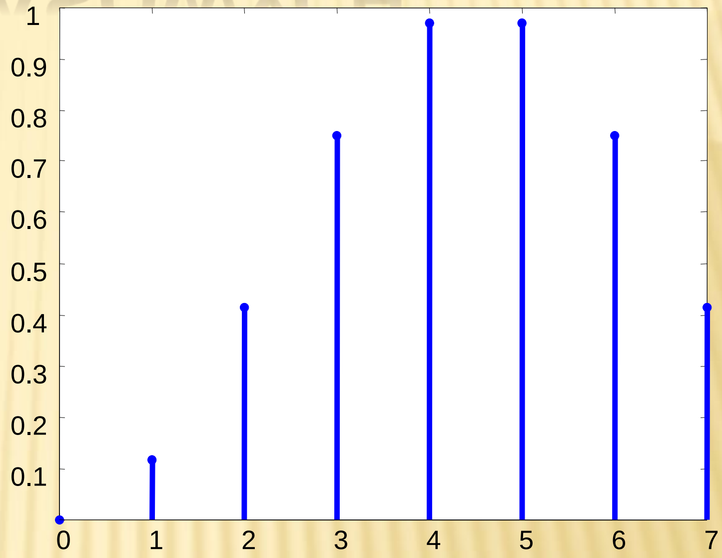
$$w(n)=\begin{cases}\dfrac{n}{N/2}, & n=0,1,\ldots,N/2\\ 2-\dfrac{n}{N/2}, & n=N/2+1,\ldots,N-1\end{cases}$$



PRZYKŁADY OKIEN CZASOWYCH

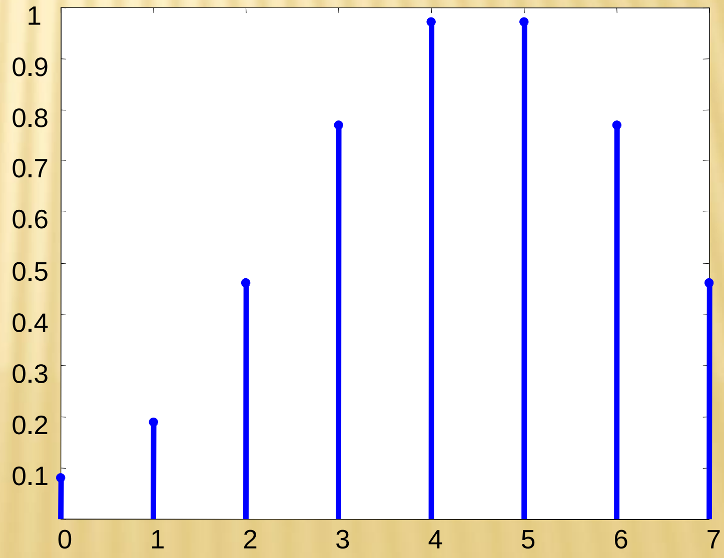
- Okno Hanninga

$$w(n)=\begin{cases}0.5-0.5\cos\left(2\pi\dfrac{n}{N+1}\right), & n=0,1,\ldots,N-1\\ 0, & \text{w p. p.}\end{cases}$$



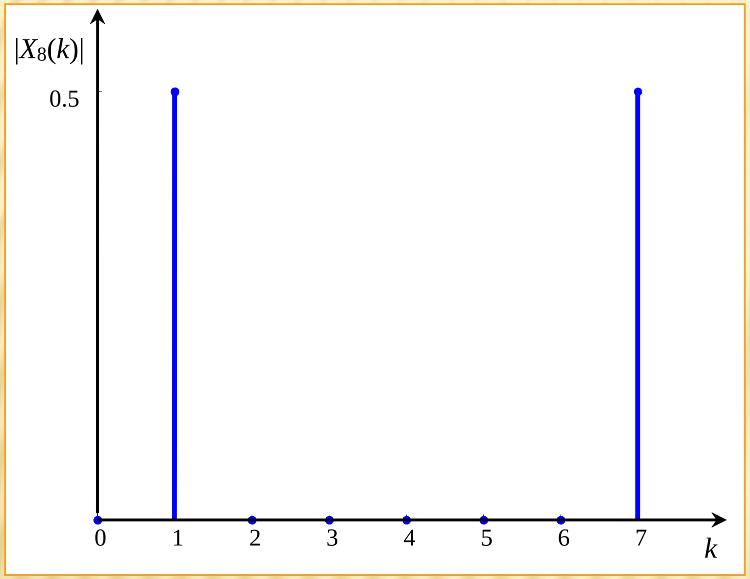
- Okno Hamminga

$$w(n)=\begin{cases}0.54-0.46\cos\left(2\pi\dfrac{n}{N+1}\right), & n=0,1,\ldots,N-1\\ 0, & \text{w p. p.}\end{cases}$$

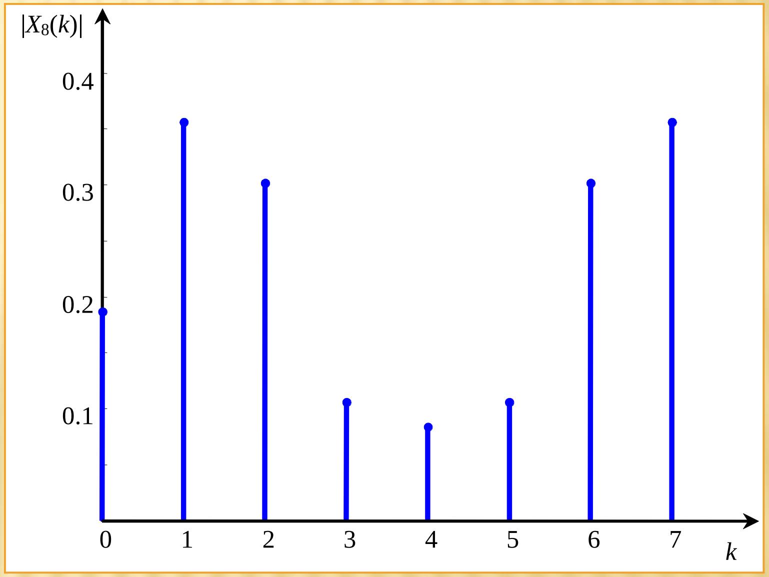


PRZYKŁAD 4 - PRZECIEK WIDMA

Próbki sygnału czasu ciągłego pobierane są z częstotliwością $f_s = 8$ Hz. Stosując 8-punktową DFT wyznaczyć i narysować widma amplitudowe sygnałów: (a) $x_1(t) = \sin(2\pi t)$, (b) $x_2(t) = \sin(3\pi t)$.



(a)



(b)

Moc zawarta w prążkach DFT jest taka sama w obu przypadkach i równa 0.5. Można powiedzieć, że moc zawarta w dwóch prążkach w przypadku (a) „rozlała” się na wszystkie osiem prążków w przypadku (b).

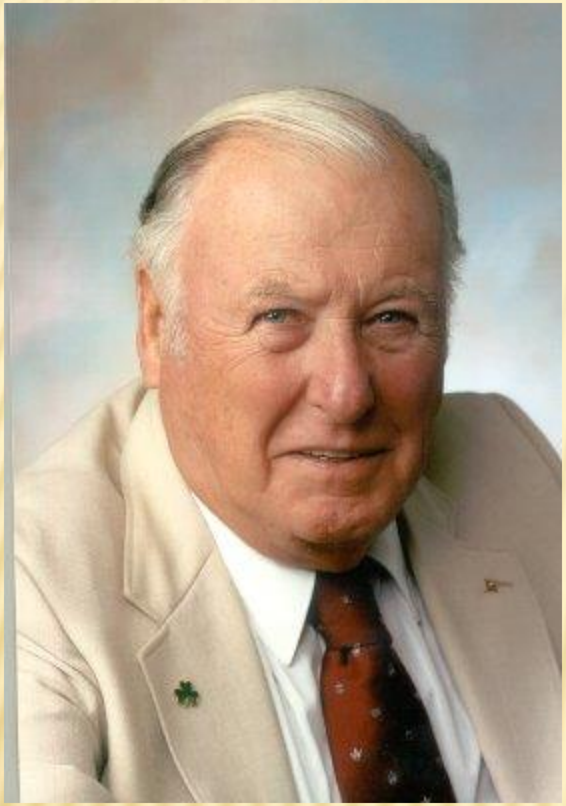
ALGORYTM FFT

- Szybka Transformacja Fouriera FFT (*z ang*. Fast Fourier Transform) jest algorytmem numerycznego wyznaczania DFT polegającym na zmniejszeniu liczby operacji obliczeniowych i liczby danych pośrednich.

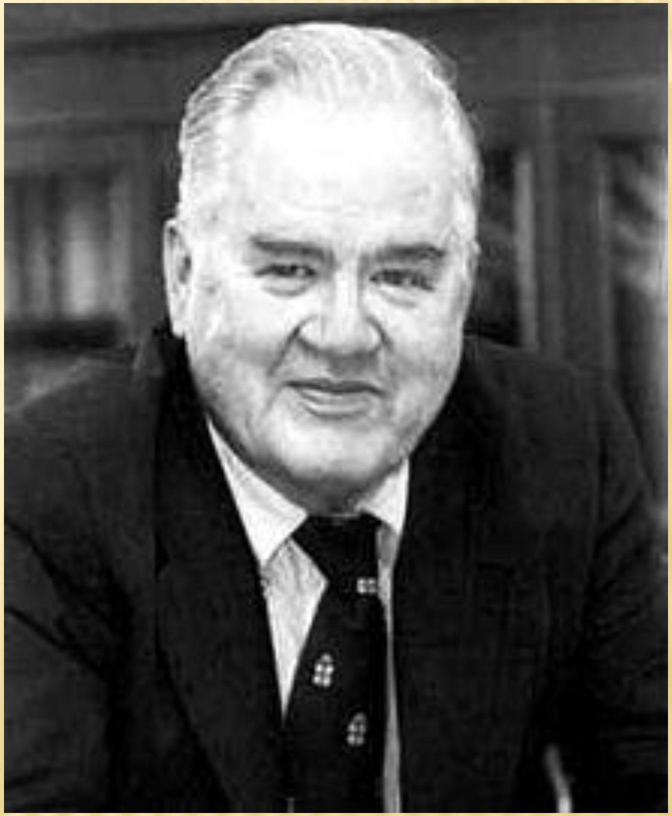
- Zakłada się, że liczba N powinna by potęgą 2.

- Istnieją dwie wersje tego algorytmu znane jako FFT z podziałem czasowym oraz FFT z podziałem częstotliwościowym.

ALGORYTM COOLEYA-TUKEYA (1965)



James Cooley (ur. 1926)



John Tukey (1915-2000)

Divide et impera

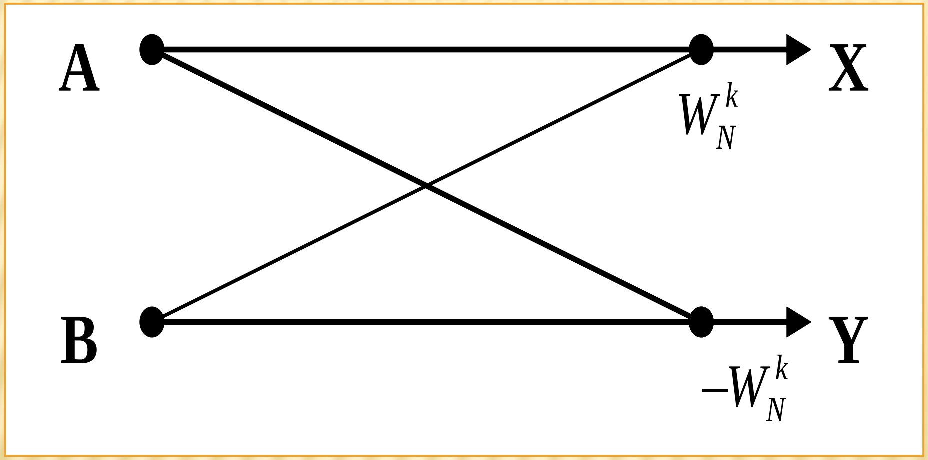
Metoda „Dziel i zwyciężaj" stosowana jest powszechnie w informatyce. Polega na rekurencyjnym dzieleniu złożonego problemu na dwa lub więcej prostszych do momentu uzyskania podproblemów nie wymagających skomplikowanych obliczeń.

FFT Z PODZIAŁEM CZASOWYM

- Podział N-punktowego przekształcenia na dwa $N/2$-punktowe, następnie na cztery $N/4$-punktowe itd. dokonuje się l razy ($N=2^l$) aż do otrzymania przekształcenia 2-punktowego.
- Do wyznaczenia N-punktowej FFT należy wykonać $N/2$ operacji mnożenia oraz N operacji dodawania.
- Całkowita liczba operacji elementarnych wynosi $lN/2$ operacji mnożenia i Nl operacji dodawania.
- Złożoność obliczeniowa algorytmu FFT wynosi $N\log_2 N$.

FFT Z PODZIAŁEM CZASOWYM

- Bazową operacją FFT jest tzw. „motylek”: operacja wiążąca dane wejściowe A, B z wyjściowymi X, Y



$$\mathrm{X} = \mathrm{A} + W_N^k \mathrm{B}$$

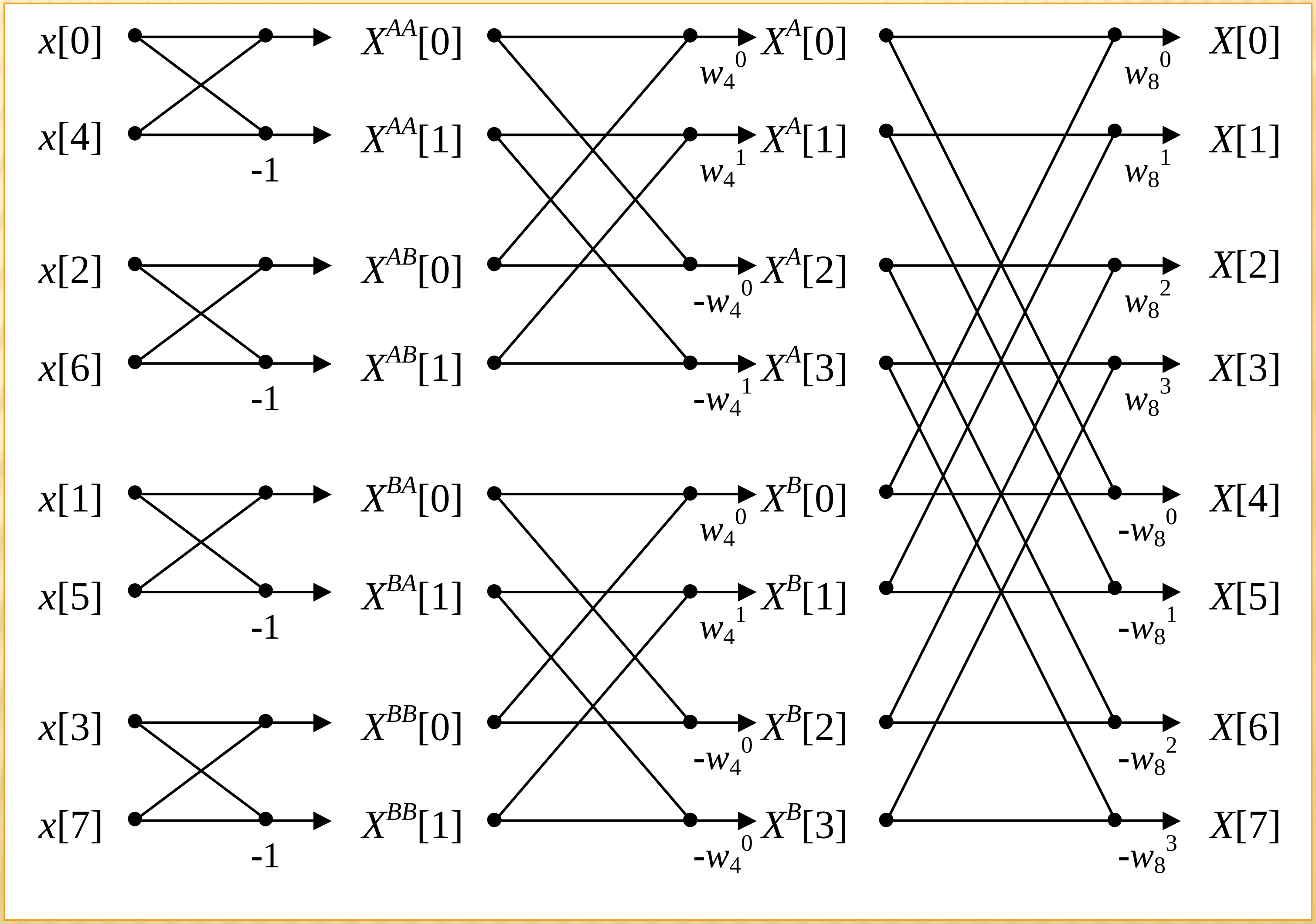
$$\mathrm{Y} = \mathrm{A} - W_N^k \mathrm{B}$$

- Sygnał pierwotny podawany jest na wejście grafu motylkowego w uporządkowaniu z odwróconą kolejnością bitów.

SYGNAŁ WEJŚCIOWY GRAFU MOTYLKOWEGO

Porządek naturalny	Zapis binarny	Kod odwrotny	Porządek z odwróconą kolejnością bitów
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

8-PUNKTOWA FFT



PRZYKŁAD 5

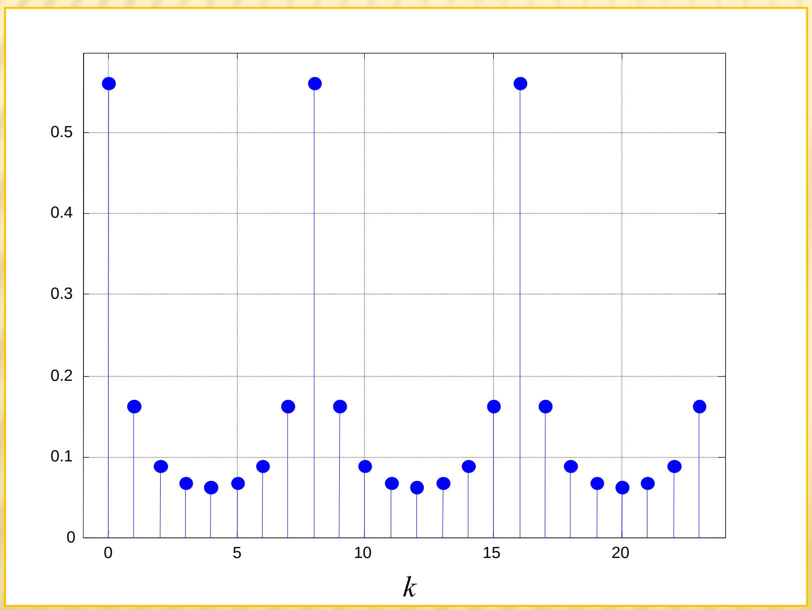
Stosując algorytm FFT z podziałem czasowym wyznaczyć 8-punktową DFT sygnału $x[n] = (n+1)/8$. Naszkicować widmo amplitudowe i fazowe tego sygnału.

$$X^{AA}(0) = x(0) + x(4) = 0.75 \qquad X^{AA}(1) = x(0) - x(4) = -0.5$$
$$X^{AB}(0) = x(2) + x(6) = 1.25 \qquad X^{AB}(1) = x(2) - x(6) = -0.5$$
$$X^{BA}(0) = x(1) + x(5) = 1 \qquad X^{BA}(1) = x(1) - x(5) = -0.5$$
$$X^{BB}(0) = x(3) + x(7) = 1.5 \qquad X^{BB}(1) = x(3) - x(7) = -0.5$$

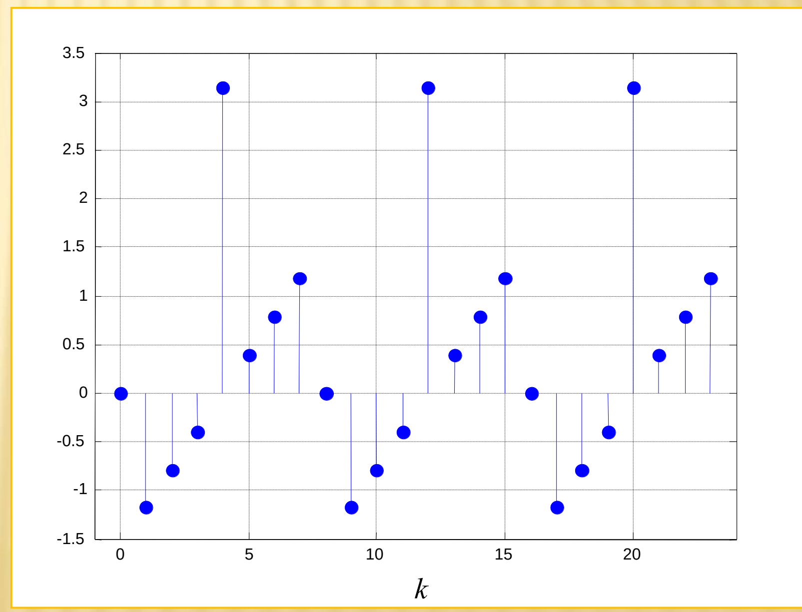
$$X^{A}(0) = X^{AA}(0) + W_4^0 X^{AB}(0) = 2 \qquad X^{B}(0) = X^{BA}(0) + W_4^0 X^{BB}(0) = 2.5$$
$$X^{A}(2) = X^{AA}(0) - W_4^0 X^{AB}(0) = -0.5 \qquad X^{B}(2) = X^{BA}(0) - W_4^0 X^{BB}(0) = -0.5$$
$$X^{A}(1) = X^{AA}(1) + W_4^1 X^{AB}(1) = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}j \qquad X^{B}(1) = X^{BA}(1) + W_4^1 X^{BB}(1) = -\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}j$$
$$X^{A}(3) = X^{AA}(1) - W_4^1 X^{AB}(1) = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}j \qquad X^{B}(3) = X^{BA}(1) - W_4^1 X^{BB}(1) = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}j$$

PRZYKŁAD 5 - CIĄG DALSZY

$$X(0)=X^A(0)+W_8^0X^B(0)=4.5$$
$$X(1)=X^A(1)+W_8^1X^B(1)=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1+\sqrt{2}}{2}j$$
$$X(2)=X^A(2)+W_8^2X^B(2)=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}j$$
$$X(3)=X^A(3)+W_8^3X^B(3)=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{\sqrt{2}-1}{2}j$$
$$X(4)=X^A(0)-W_8^0X^B(0)=-0.5$$
$$X(5)=X^A(1)-W_8^1X^B(1)=-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1-\sqrt{2}}{2}j$$
$$X(6)=X^A(2)-W_8^2X^B(2)=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}j$$
$$X(7)=X^A(3)-W_8^3X^B(3)=-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1+\sqrt{2}}{2}j$$



Widmo amplitudowe



Widmo fazowe