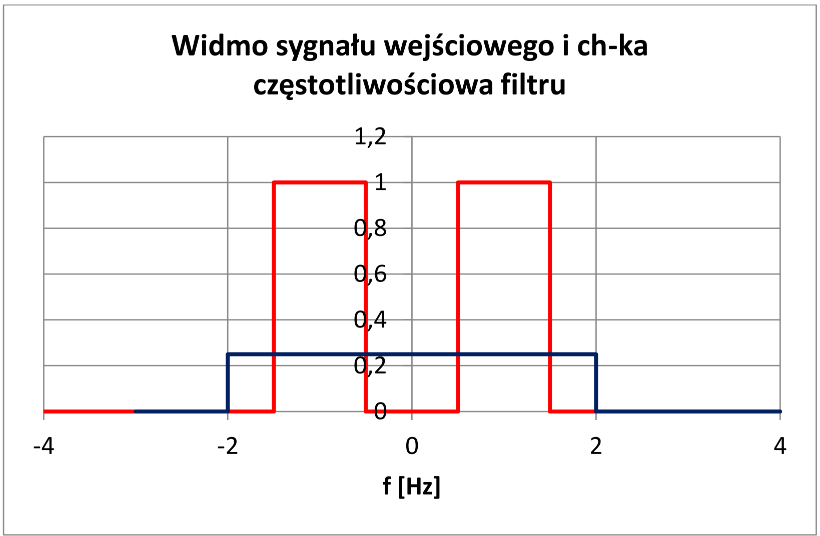
Odpowiedzi do przykładowych zadań do kolokwium 2 –ASiSP
Semestr letni 2019

FILTRACJA FOURIEROWSKA

1.1 Wyznaczamy widmo sygnału na wyjściu filtru ze wzoru: $Y(f)=X(f)H(f)$, gdzie $X(f)=F\{Sa(4\pi t)\}=\frac{1}{4}\Pi\left(\frac{f}{4}\right)$. Na wspólnym wykresie przedstawiamy widmo $X(f)$ oraz charakterystykę częstotliwościową $H(f)$ filtru idealnego BP.



$Y(f)=\frac{1}{4}\Pi(f-1)+\frac{1}{4}\Pi(f+1)$

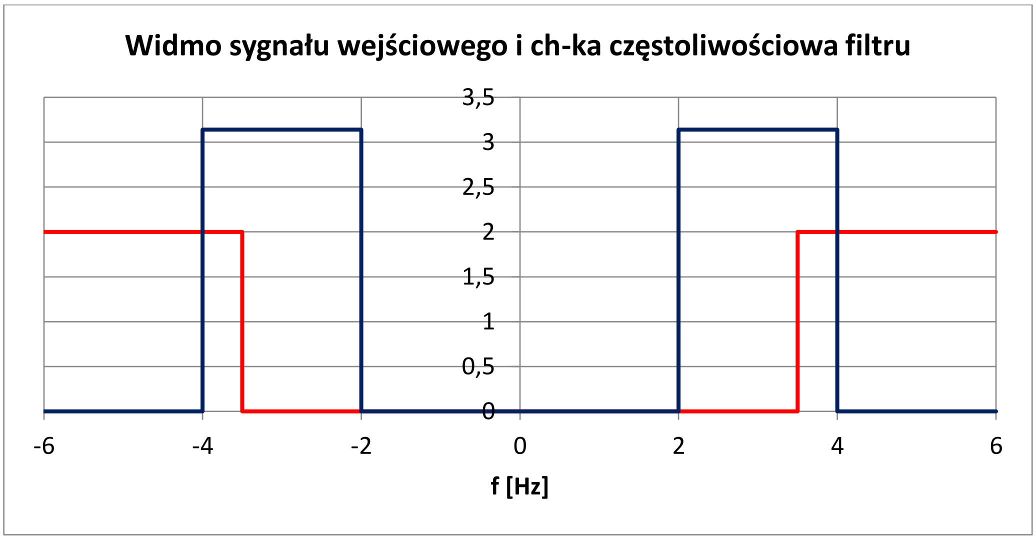
Stosując tw. o modulacji otrzymujemy:

$y(t)=\frac{1}{2}Sa(\pi t)\cos(2\pi t)$.

Porównajmy energie sygnałów wejściowego i wyjściowego:

$E_x=\frac{1}{16}\cdot 4=\frac{1}{4},\ E_y=\frac{1}{16}(1+1)=\frac{1}{8}$.

1.2 Zadanie rozwiązujemy podobnie jak zad. 1.1. Wyznaczamy widmo sygnału wejściowego: $X(\omega)=F\{2Sa(t)\cos(3t)\}=\pi\cdot\left[\Pi\left(\frac{\omega-3}{2}\right)+\Pi\left(\frac{\omega+3}{2}\right)\right]$. Na wspólnym wykresie przedstawiamy widmo $X(\omega)$ oraz charakterystykę częstotliwościową $H(\omega)$ filtru idealnego HP.

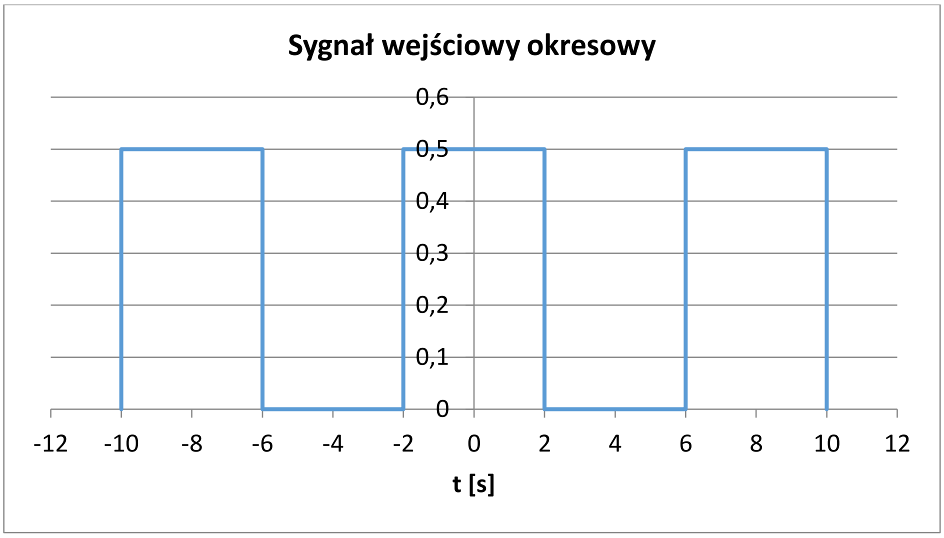


Wyznaczamy widmo sygnału na wyjściu filtru ze wzoru: $Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)$ i obliczamy energię $y(t)$ stosując tw. Parsevala w dziedzinie ω.

$E_y = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\cdot\int_{\omega_g}^{4} 4\pi^2 d\omega = 4\pi\left(4-\omega_g\right)$. Wiadomo, że energia sygnału wejściowego $E_x = \frac{1}{2\pi}\cdot 2\cdot\pi^2\cdot 2 = 2\pi$.

Energia sygnału wyjściowego powinna być równa π. Rozwiązujemy równanie: $E_y = 4\pi\left(4-\omega_g\right) = \pi$, skąd otrzymujemy $\omega_g = 3{,}75\ \mathrm{rad/s}$.

1.3 Wyznaczamy widmo sygnału okresowego o okresie podstawowym równym 8 mającego postać nieskończonej sumy ciągu impulsów prostokątnych o amplitudzie ½ i czasie trwania 4 :



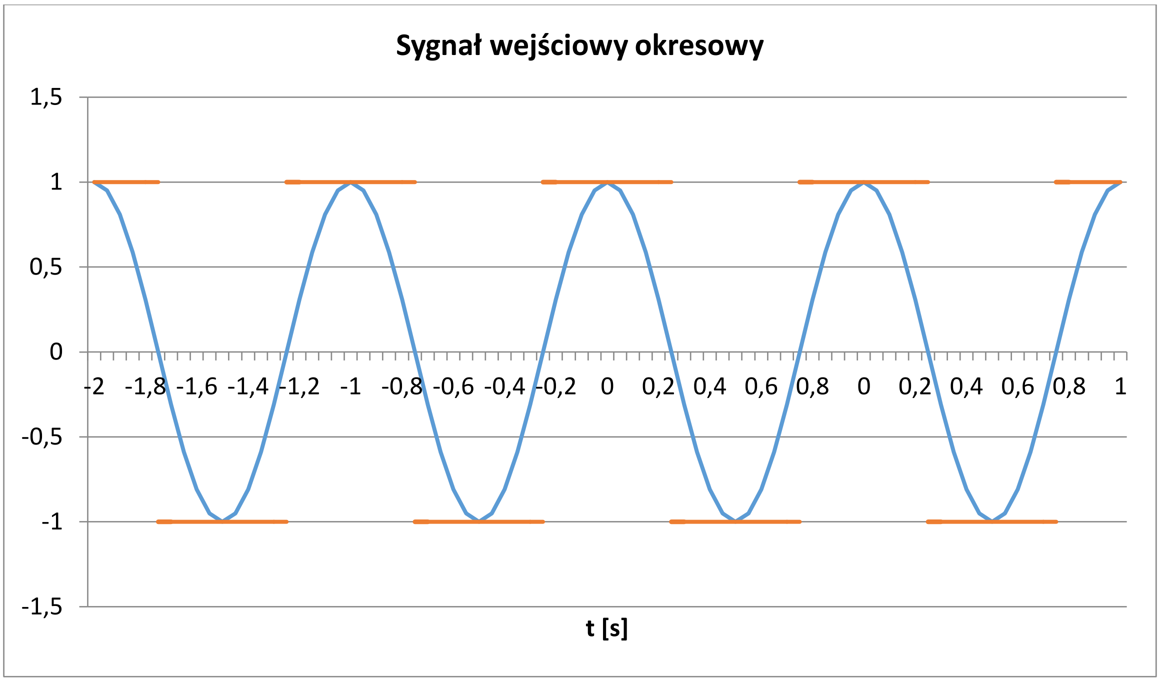
Widmo sygnału okresowego $x(t)$ jest dyskretne: $X(\omega) = 2\pi\sum_n c_n\delta(\omega - n\omega_0)$, $\omega_0 = 2\pi/T_0 = \pi/4$,

a współczynniki $c_n = \frac{1}{T_0}Z(n\omega_0) = \frac{1}{8}Z\left(n\frac{\pi}{4}\right)$, gdzie $Z(\omega) = F\left\{\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{t}{4}\right)\right\} = 2\mathrm{Sa}(2\omega)$. Mamy więc

$c_n = \frac{1}{8}\cdot 2\cdot\mathrm{Sa}\left(2n\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{4}\mathrm{Sa}\left(n\frac{\pi}{2}\right)$. Prążki widma pojawiają się na pulsacjach będących wielokrotnościami pulsacji podstawowej równej $\pi/4$.

Wiadomo, że sygnał na wyjściu filtru ma postać $y(t) = \frac{1}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$, jego widmo jest równe $Y(\omega) = \delta\left(\omega - \frac{\pi}{4}\right) + \delta\left(\omega + \frac{\pi}{4}\right)$, czyli zawiera tylko dwa prążki na pulsacji $\pm\pi/4$. Ponadto $Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$. Filtr powinien być tak dobrany, aby z widma $X(\omega)$ „wycinał" jeden prążek odpowiadający pulsacji $\pm\pi/4$ o wysokości równej $2\pi c_1 = 2\pi\cdot\frac{1}{4}\mathrm{Sa}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Spełnienie tego warunku zapewnia idealny filtr BP o stałym wzmocnieniu równym 1, paśmie przepustowym np. $(\omega_1, \omega_2) = (0, \pi/2)$.

1.4. Na rysunku przedstawiono wykres funkcji $\cos(2\pi t)$ oraz $x(t) = \mathrm{sgn}\left[\cos(2\pi t)\right]$. Sygnał $x(t)$ ma postać bipolarnego ciągu impulsów prostokątnych o czasie trwania 0,5 s, amplitudzie ± 1 i okresie podstawowym równym 1.



Wyznaczmy widmo tego sygnału: $X(f)=\sum_n c_n \delta(f-nf_0),\ \ f_0=1\,\mathrm{Hz}$, gdzie współczynniki c_n są równe:

$c_n=\frac{1}{T_0}Z(nf_0)=Z(n\cdot 1)$, a $Z(f)$ oznacza widmo różnicy impulsów: $z(t)=\Pi\left(\frac{t}{0,5}\right)-\Pi\left(\frac{t-0,5}{0,5}\right)$. Mamy więc:

$Z(f)=\frac{1}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\pi f}{2}\right)-\frac{1}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\pi f}{2}\right)e^{-j\pi f}=\frac{1}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\pi f}{2}\right)\left(1-e^{-j\pi f}\right)$.

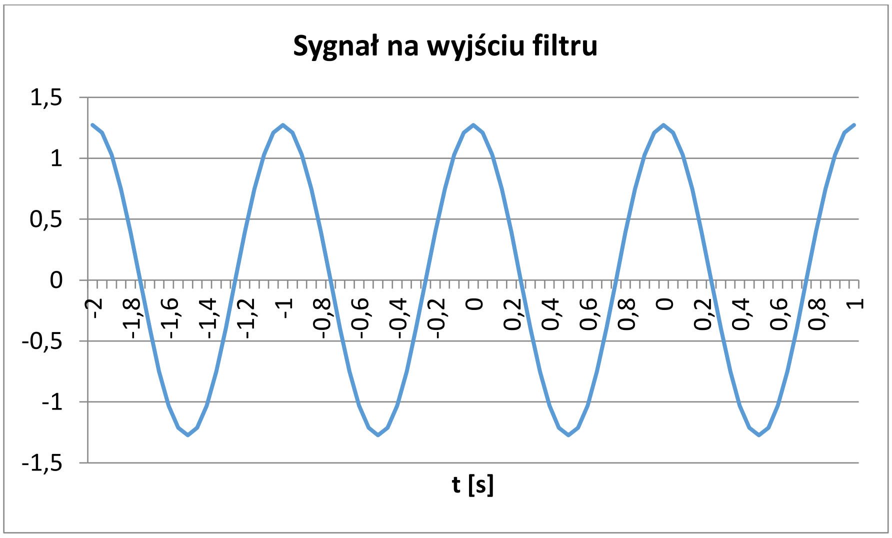
Obliczmy współczynniki: $c_n=\frac{1}{2}\mathrm{Sa}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\left(1-e^{-j\pi n}\right)$. Otrzymujemy: $X(f)=\frac{1}{2}\sum_n \mathrm{Sa}\left(n\frac{\pi}{2}\right)\left(1-e^{-j\pi n}\right)\delta(f-n)$.

W zadaniu mamy do czynienia z filtracją idealną LP. Filtr „przepuszcza” częstotliwości z pasma $\left[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right]\mathrm{Hz}$.

Widmo sygnału na wyjściu filtru jest równe: $Y(f)=X(f)H(f)=\sum_{n=-1}^{1} c_n\delta(f-n)$. Obliczmy współczynniki

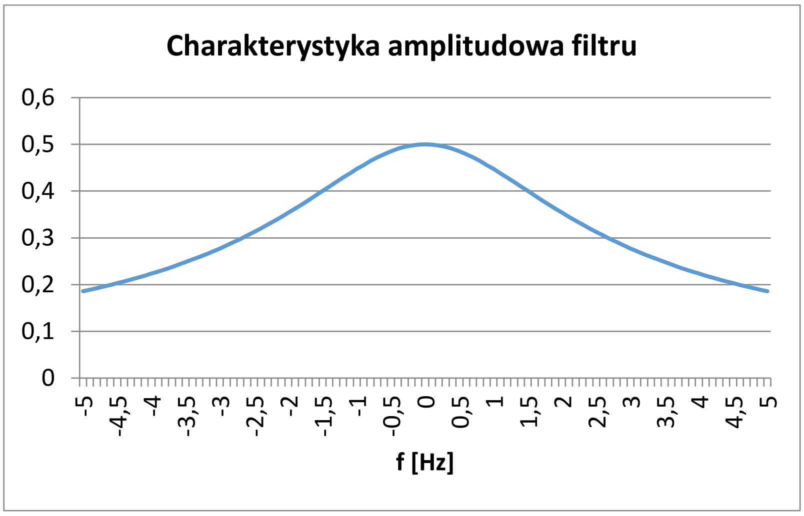
$c_1=\frac{1}{2}\mathrm{Sa}\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(1-e^{-j\pi}\right)=\frac{2}{\pi}=c_{-1}$, współczynnik $c_0=0$.

Widmo $Y(f)=\frac{2}{\pi}\left[\delta(f-1)+\delta(f+1)\right]$, a sygnał na wyjściu filtru jest równy $y(t)=\frac{4}{\pi}\cos(2\pi t)$.



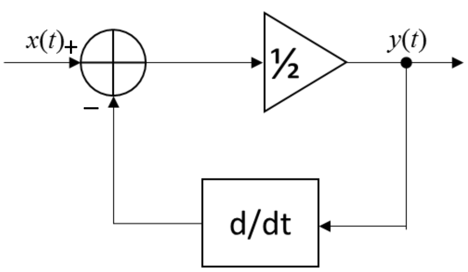
1.5 Odpowiedź jednostkowa i impulsowa powiązane są relacją: $\frac{d}{dt}k(t)=h(t)$. Różniczkując, otrzymujemy: $\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left(1-e^{-2t}\right)\cdot 1(t)=e^{-2t}\cdot 1(t)$, czyli $h(t)=e^{-2t}\cdot 1(t)$. Charakterystyka częstotliwościowa filtru jest transformatą Fouriera odpowiedzi impulsowej: $H(\omega)=F\left\{e^{-2t}\cdot 1(t)\right\}=\frac{1}{2+j\omega}$. Charakterystyka amplitudowa jest równa $A(\omega)=\left|H(\omega)\right|=\frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}$ (p. rysunek). Jest to filtr rzeczywisty LP. Wyznaczmy pasmo 3-decybelowe:

$A(\omega_{3dB})=\frac{A(0)}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $A(\omega_{dB})=\frac{1}{\sqrt{4+\omega_{3dB}^2}}$. Rozwiązujemy równanie $\frac{1}{\sqrt{4+\omega_{3dB}^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, skąd otrzymujemy pasmo 3dB: $\left[-2,2\right]$ rad/s.



Odpowiedź na sygnał stały równy $\frac{1}{2}$ wyznaczamy ze wzoru: $y(t)=\frac{1}{2}H(0)=\frac{1}{4}, t\in\mathbb{R}$.

Charakterystyka częstotliwościowa jest równa $H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{1}{2+j\omega}$. Równanie „wejście-wyjście” ma postać $y(t)=\frac{1}{2}\left[x(t)-\frac{dy(t)}{dt}\right]$.



1.6 Wyznaczamy widmo sygnału wejściowego $X(\omega)=F\left\{e^{-t}1(t)+e^{-3t}1(t)\right\}=\frac{1}{1+j\omega}+\frac{1}{3+j\omega}=\frac{4+2j\omega}{(1+j\omega)(3+j\omega)}$ oraz widmo sygnału na wyjściu filtru: $Y(\omega)=2F\left\{e^{-t}1(t)-e^{-4t}1(t)\right\}=2\left(\frac{1}{1+j\omega}-\frac{1}{4+j\omega}\right)=\frac{6}{(1+j\omega)(4+j\omega)}$.

Charakterystyka częstotliwościowa jest równa $H(\omega)=\dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}=3\dfrac{3+j\omega}{(4+j\omega)(2+j\omega)}$. Odpowiedź impulsową wyznaczamy jako odwrotną transformatę Fouriera transmitancji częstotliwościowej, stosując rozkład na ułamki proste:

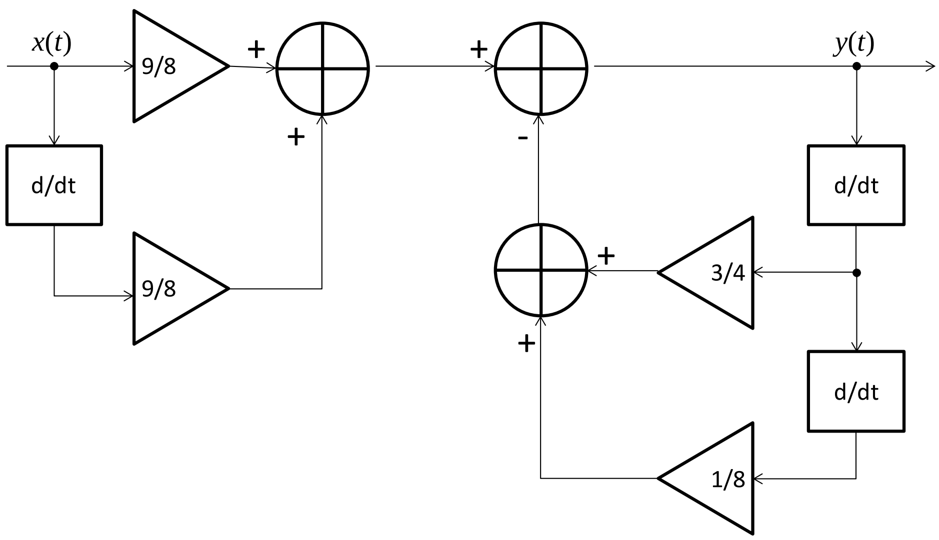
$$h(t)=F^{-1}\{H(\omega)\}=3\cdot F^{-1}\left\{\frac{3+j\omega}{(4+j\omega)(2+j\omega)}\right\}=3\cdot\left(\frac{A}{4+j\omega}+\frac{B}{2+j\omega}\right)$$, skąd $A=B=\frac{1}{2}$.

Odpowiedź impulsowa jest równa $h(t)=\frac{3}{2}\left(e^{-4t}+e^{-2t}\right)1(t)$. Równanie „wejście-wyjście" wyznaczamy z transmitancji częstotliwościowej:

$\dfrac{Y(\omega)}{X(\omega)}=3\dfrac{3+j\omega}{(4+j\omega)(2+j\omega)}$, $9X(\omega)+3j\omega X(\omega)=8Y(\omega)+6j\omega Y(\omega)+(j\omega)^2Y(\omega)$. Odwrotne przekształcenie Fouriera daje ostatecznie: $9x(t)+3\dfrac{dx(t)}{dt}=8y(t)+6\dfrac{dy(t)}{dt}+\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}$, co jest równoważne:

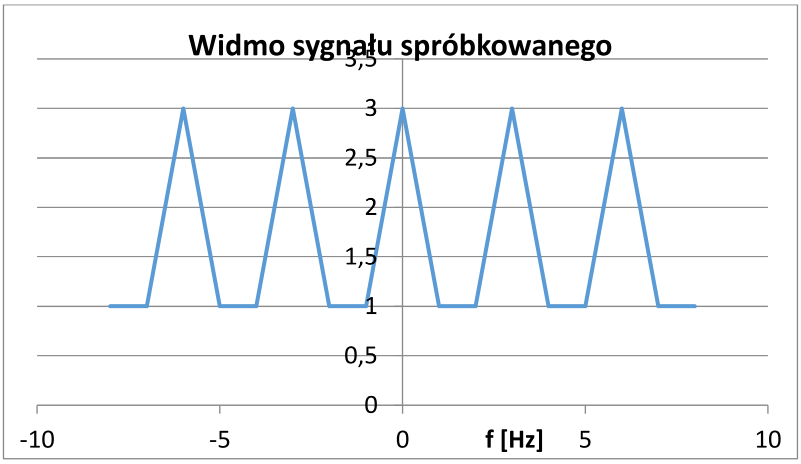
$$y(t)=\frac{9}{8}x(t)+\frac{3}{8}\frac{dx(t)}{dt}-\frac{3}{4}\frac{dy(t)}{dt}-\frac{1}{8}\frac{d^2y(t)}{dt^2}.$$

Przykładowy schemat blokowy:

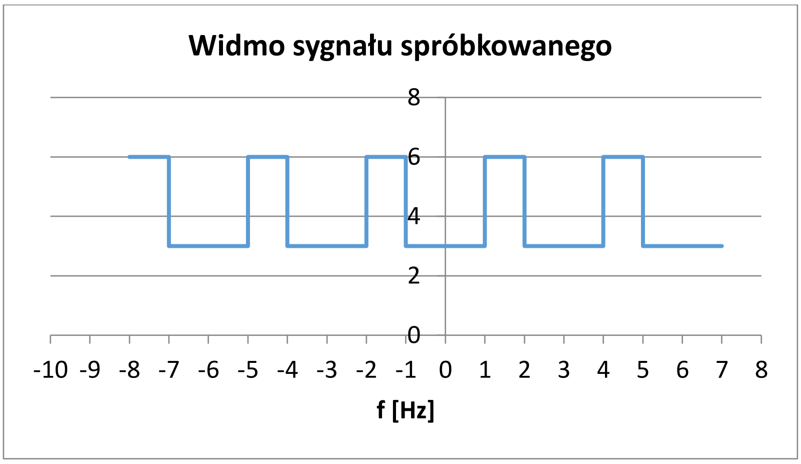


PRÓBKOWANIE

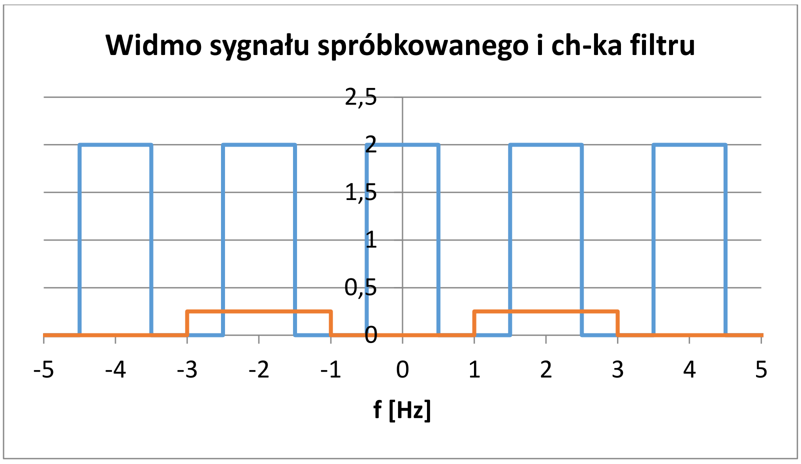
2.1 (a) Częstotliwość maksymalna wynosi $f_{max} = 2\,\mathrm{Hz}$, stąd częstotliwość Nyquista jest równa $f_N = 4\,\mathrm{Hz}$. Warunek Nyquista nie jest spełniony, zajdzie zjawisko aliasingu częstotliwościowego. Widmo sygnału spróbkowanego dane jest wzorem: $X_s(f) = f_s \sum_n X(f - nf_s) = 3\sum_n \Lambda\left(\frac{f-3n}{2}\right)$. Przedstawiono je na wykresie:



(b) Częstotliwość maksymalna wynosi $f_{max} = 2\,\mathrm{Hz}$, stąd częstotliwość Nyquista jest równa $f_N = 4\,\mathrm{Hz}$. Warunek Nyquista nie jest spełniony, zajdzie zjawisko aliasingu częstotliwościowego. Widmo sygnału spróbkowanego dane jest wzorem: $X_s(f) = f_s \sum_n X(f - nf_s) = 3\sum_n \Pi\left(\frac{f-3n}{4}\right)$. Przedstawiono je na wykresie:



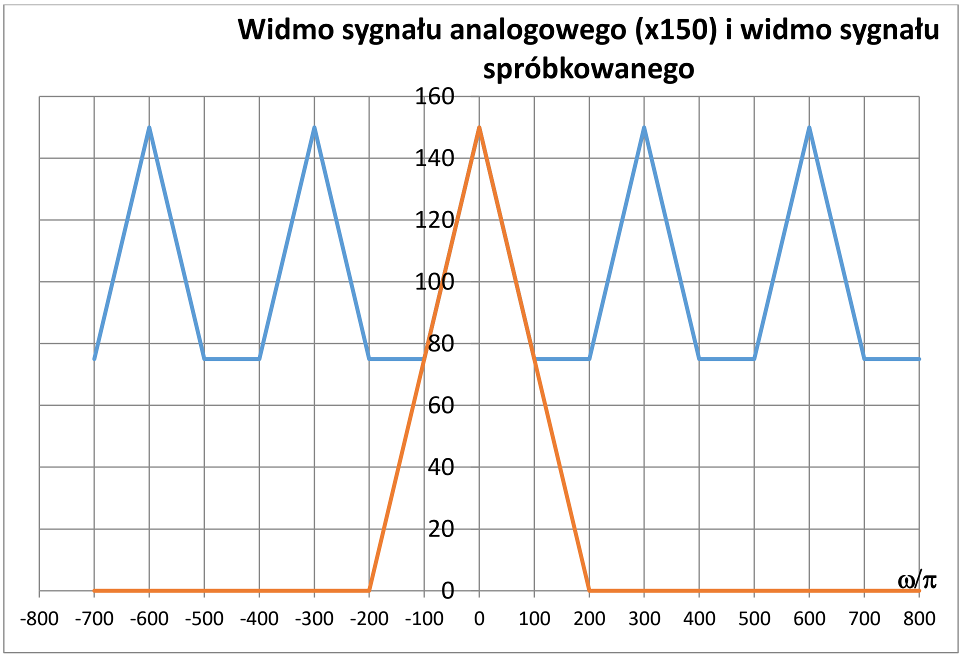
2.2 Widmo sygnału analogowego jest równe $X(f) = \Pi(f)$, czyli $f_{\max} = 0{,}5$, a częstotliwość Nyquista $f_N = 1\,\mathrm{Hz}$. Próbkujemy z częstotliwością większą od f_N, czyli nie zachodzi zjawisko aliasingu. Widmo sygnału spróbkowanego jest równe: $X_s(f) = 2\sum_n X(f-2n) = 2\sum_n \Pi(f-2n)$. Pokazano je na rysunku:



Sygnał spróbkowany podano na wejście filtru o odpowiedzi impulsowej $h(t)=\mathrm{Sa}(2\pi t)\cos(4\pi t)$ i ch-ce częstotliwościowej $H(f)=\frac{1}{4}\Pi\left(\frac{f-2}{2}\right)+\frac{1}{4}\Pi\left(\frac{f+2}{2}\right)$,czyli idealnego filtru pasmowo przepustowego o wzmocnieniu ¼ w paśmie przepustowym o szerokości 2 Hz i częstotliwości środkowej 2 Hz.

Widmo sygnału wyjściowego jest równe $Y(f)=\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f-2}{1}\right)+\frac{1}{2}\Pi\left(\frac{f+2}{1}\right)$, a sygnał wyjściowy $y(t)=\mathrm{Sa}(\pi t)\cos(4\pi t)$.

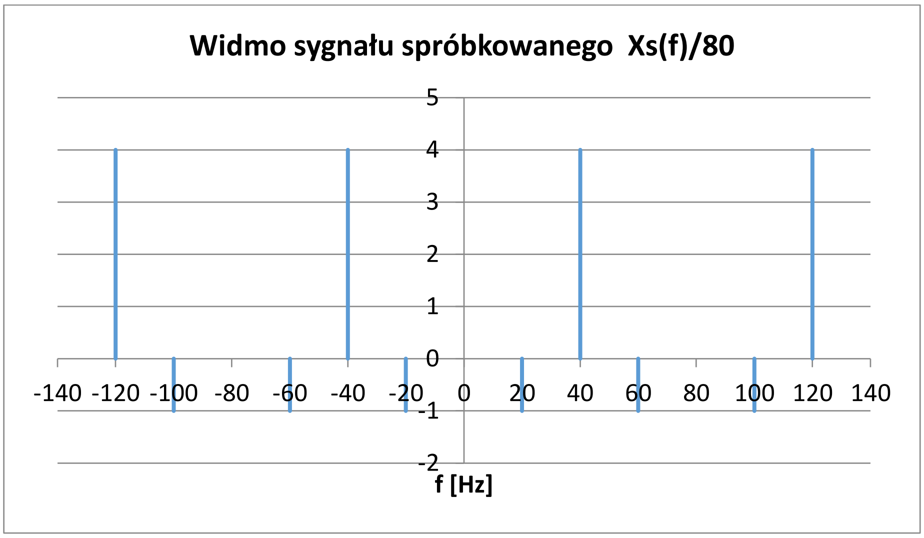
2.3 Sygnał $x(t)=100\mathrm{Sa}^2(100\pi t)$ ma widmo $X(\omega)=\Lambda\left(\frac{\omega}{200\pi}\right)$. Jego pulsacja maksymalna wynosi 200π rad/s. Pulsacja Nyquista jest równa $\omega_N=400\pi$ rad/s. Próbkujemy z częstotliwością $f_s=150$ Hz, co odpowiada pulsacji $\omega_s=300\pi$ rad/s. Widmo sygnału spróbkowanego jest równe $G(\omega)=150\sum_n X(\omega-n\cdot 300\pi)=150\sum_n \Lambda\left(\frac{\omega-n\cdot 300\pi}{200\pi}\right)$.



Sprawdzamy z wykresem, kiedy jest spełniony warunek $G(\omega)=150X(\omega)$, $|\omega|\le\omega_0$ i odczytujemy wartość $\omega_0=100\pi$ rad/s.

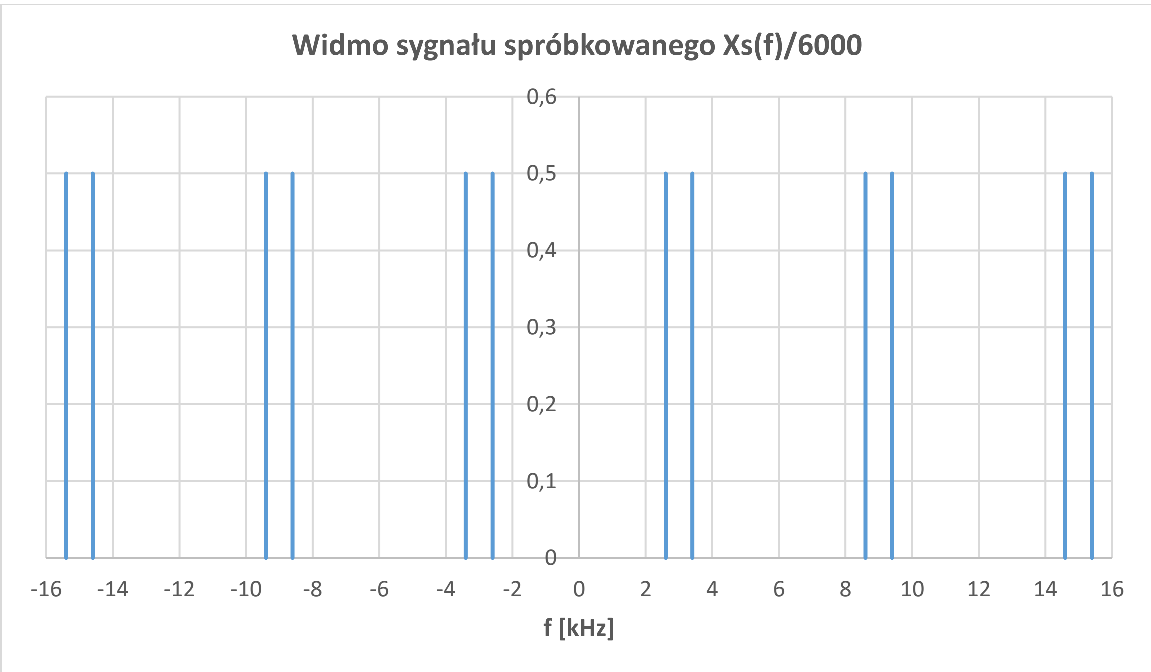
2.4 Sygnał analogowy ma postać: $x(t)=4\cos(80\pi t)-2\cos(40\pi t)$. Jego częstotliwość maksymalna jest równa $f_{\max}=40\,\mathrm{Hz}$, a częstotliwość Nyquista $f_N=80\,\mathrm{Hz}$. Próbkujemy z częstotliwością $f_s=f_N$. Widmo sygnału spróbkowanego dane jest wzorem:

$$X_s(f)=80\sum_n\left[2\delta(f-n\cdot 80+40)-\delta(f-n\cdot 80+20)-\delta(f-n\cdot 80-20)+2\delta(f-n\cdot 80-40)\right]$$



Sygnał spróbkowany podawany jest następnie na wejście filtru idealnego LP o częstotliwości granicznej 50 Hz i wzmocnieniu 1/80. Widmo sygnału na wyjściu filtru jest równe $Y(f)=X_s(f)H(f)$. Widzimy, że w paśmie filtru mieszczą się prążki na częstoliwościach $\pm 20\,\mathrm{Hz}$ oraz $\pm 40\,\mathrm{Hz}$. Mamy więc $Y(f)=4\delta(f+40)-\delta(f+20)-\delta(f-20)+4\delta(f-40)$, czyli sygnał $y(t)=8\cos(80\pi t)-2\cos(40\pi t)$.

2.5 Widmo sygnału analogowego jest równe $X(f)=\frac{1}{2}\delta(f-3400)+\frac{1}{2}\delta(f+3400)$. Częstotliwość maksymalna wynosi $f_{\max}=f_0=3{,}4\,\mathrm{kHz}$, więc częstotliwość Nyquista $f_N=6{,}8\,\mathrm{kHz}$. Próbkujemy z częstotliwością 6 kHz mniejszą od f_N. Widmo sygnału spróbkowanego jest równe $X_s(f)=6000\sum_n\left[\tfrac{1}{2}\delta(f-6000n-3400)+\tfrac{1}{2}\delta(f-6000n-3400)\right]$.

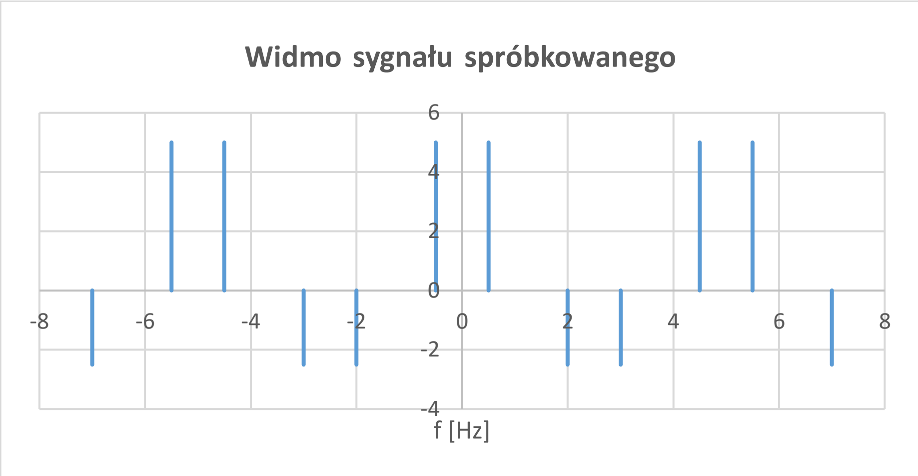


(a) Sygnał spróbkowany podajemy na wejście filtru idealnego LP. Przyjmijmy, że wzmocnienie filtru jest równe $1/f_s$. W pierwszym przypadku dostajemy na wyjściu sygnał $y(t)=\cos(5200\pi t)$.

(b) W tym przypadku $y(t)=\cos(5200\pi t)+\cos(6800\pi t)$.

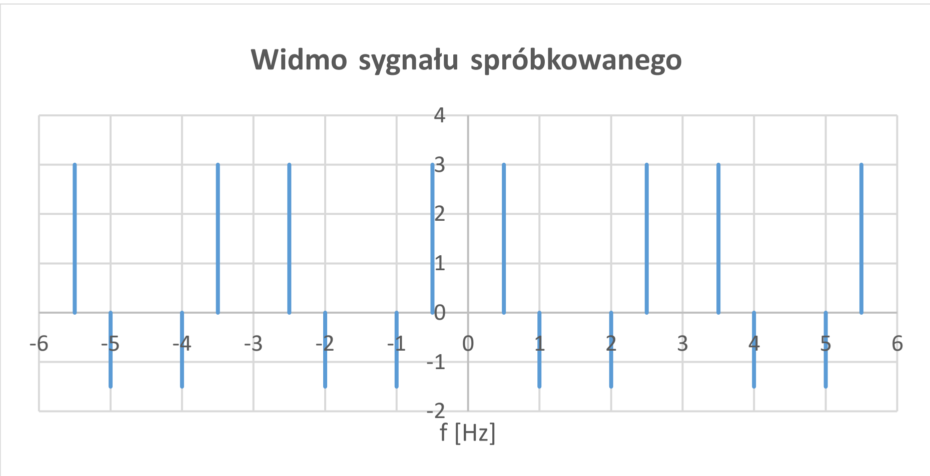
2.6 Widmo sygnału analogowego jest równe $X(f)=\delta(f-0{,}5)+\delta(f+0{,}5)-\frac{1}{2}\delta(f-2)-\frac{1}{2}\delta(f+2)$. Częstotliwość maksymalna wynosi $f_{\max}=2\,\mathrm{Hz}$, a częstotliwość Nyquista $f_N=4\,\mathrm{Hz}$.

(a) Rozważmy przypadek $f_s=5\,\mathrm{Hz}$, warunek Nyquista jest spełniony. Widmo sygnału spróbkowanego jest równe $X_s(f)=5\sum_n X(f-5n)$.



Widmo sygnału na wyjściu filtru $Y(f)=X_s(f)H(f)$. Filtr LP ma wzmocnienie równe 1 i częstotliwość graniczną 1,5 Hz. Widmo $Y(f)=5\delta(f-0{,}5)+5\delta(f+0{,}5)$, czyli $y(t)=10\cos(\pi t)$.

(b) Rozważmy przypadek $f_s=3\,\mathrm{Hz}$, warunek Nyquista nie jest spełniony. Widmo sygnału spróbkowanego jest równe $X_s(f)=3\sum_n X(f-3n)$.



Widmo sygnału na wyjściu filtru $Y(f)=3\delta(f-0{,}5)+3\delta(f+0{,}5)-\frac{3}{2}\delta(f-1)-\frac{3}{2}\delta(f+1)$, czyli $y(t)=6\cos(\pi t)-3\cos(2\pi t)$.

FILTRY CYFROWE

3.1 (a) Na podstawie schematu blokowego otrzymujemy równanie systemu: $y(n) = \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{10}x(n-1) + \frac{1}{4}y(n-2)$. Dalej zapisujemy je w dziedzinie zmiennej zespolonej z:

$Y(z) = \frac{1}{2}X(z) + \frac{1}{10}z^{-1}X(z) + \frac{1}{4}z^{-2}Y(z)$, dalej $Y(z)\left(1-\frac{1}{4}z^{-2}\right) = X(z)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{10}z^{-1}\right)$. Transmitancja systemu wynosi $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{10}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{10}z}{z^2-\frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{10}z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)}$.

Odpowiedź impulsową wyznaczamy stosując rozkład $H(z)/z$ na ułamki proste:

$\frac{H(z)}{z} = \frac{\frac{1}{2}z+\frac{1}{10}}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{z+\frac{1}{2}}$, skąd $A = 7/20,\ B = 3/20$. Dalej $H(z) = \frac{\frac{7}{20}z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{20}z}{z+\frac{1}{2}}$. Stosując tablice transformat znajdujemy odpowiedź impulsową $h(n) = \frac{7}{20}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{20}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, n \geq 0$.

(b) Równanie systemu ma postać: $y(n) = x(n) - \frac{1}{2}y(n-2) - y(n-1)$. W dziedzinie zmiennej zespolonej z:

$Y(z) = X(z) - \frac{1}{2}z^{-2}Y(z) - z^{-1}Y(z)$, czyli $Y(z)\left(1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right) = X(z)$. Transmitancja systemu:

$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2+z+\frac{1}{2}}$. W tablicach transformat odnajdujemy pary:

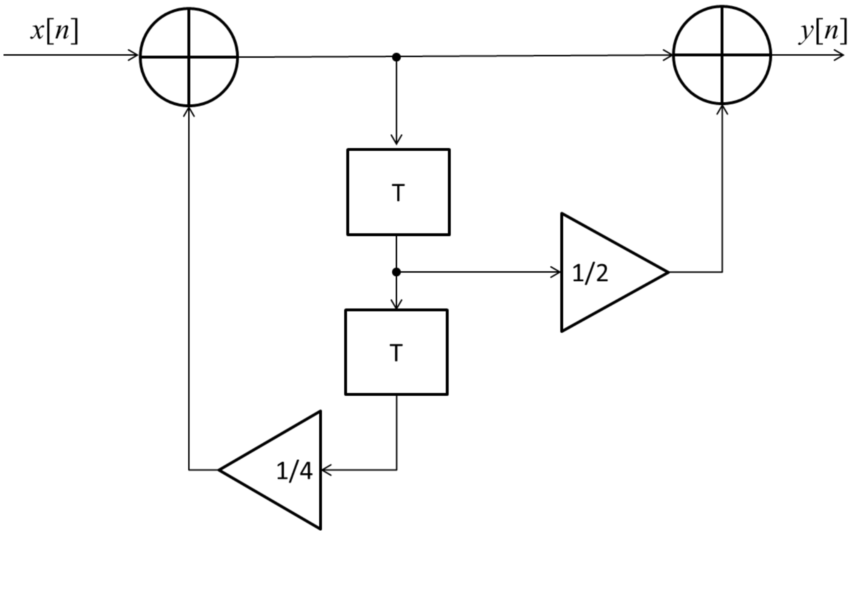
$$a^n \sin(\alpha n)\cdot 1[n] \overset{z}{\Leftrightarrow} \frac{za\sin\alpha}{z^2-2za\cos\alpha+a^2}, \quad a^n \cos(\alpha n)\cdot 1[n] \overset{z}{\Leftrightarrow} \frac{z(z-a\cos\alpha)}{z^2-2za\cos\alpha+a^2}.$$

Niech $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, wtedy $-2a\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2}}\cos\alpha = 1$, skąd $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

Przekształcamy transmitancję $H(z) = \frac{z\left(z+\frac{1}{2}\right)}{z^2+z+\frac{1}{2}} - \frac{\frac{1}{2}z}{z^2+z+\frac{1}{2}}$ i na podstawie powyższych wzorów mamy:

$$h(n) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}n\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)\right] \cdot \mathbf{1}(n).$$

3.2 Przekształcamy równanie systemu do postaci $y(n) = \frac{1}{4}y(n-2) + x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$ i na tej podstawie rysujemy schemat blokowy w postaci bezpośredniej II (liczba bloków opóźniających jest równa 2)

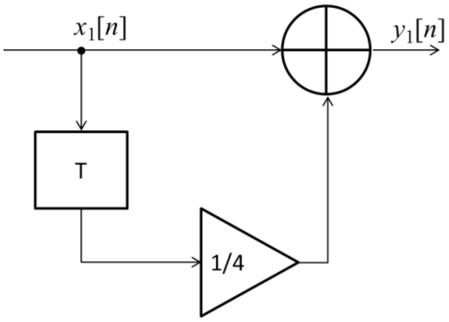


Transmitancja systemu jest równa $H(z)=\frac{1+\frac{1}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}}=\frac{z^2+\frac{1}{2}z}{z^2-\frac{1}{4}}=\frac{z^2+\frac{1}{2}z}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{2}\right)}=\frac{z}{z-\frac{1}{2}}$. Odpowiedź impulsową ma postać $h(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\mathbf{1}(n)$.

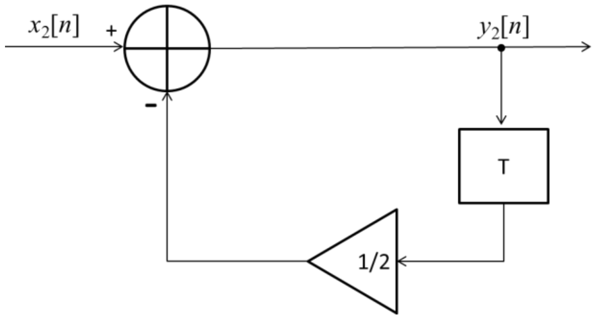
3.3 W połączeniu szeregowym dwóch bloków S1 i S2 mamy: $x(n)=x_1(n),\ y_1(n)=x_2(n),\ y_2(n)=y(n)$.

Podstawiając do równań obu systemów dostajemy: $\begin{cases} y_1(n)=x(n)+\frac{1}{4}x(n-1) \\ y(n)=-\frac{1}{2}y(n-1)+y_1(n) \end{cases}$.

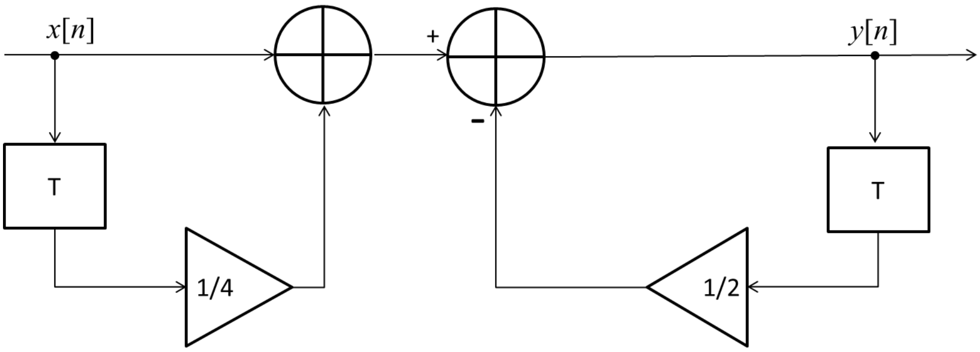
Sprowadzamy układ równań do jednego równania: $y(n)=-\frac{1}{2}y(n-1)+x(n)+\frac{1}{4}x(n-1)$ i odczytujemy wartości współczynników: $a=1/2$, $b_0=1$, $b_1=1/4$.



schemat blokowy S1

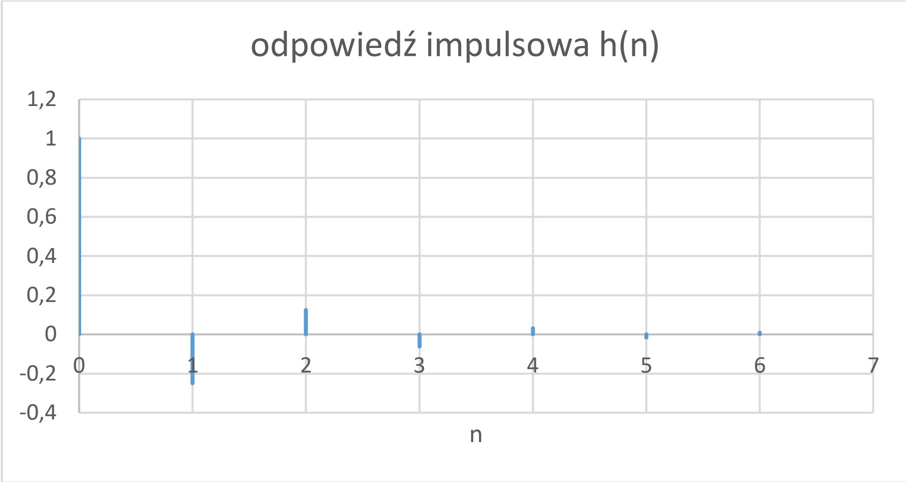


schemat blokowy S2



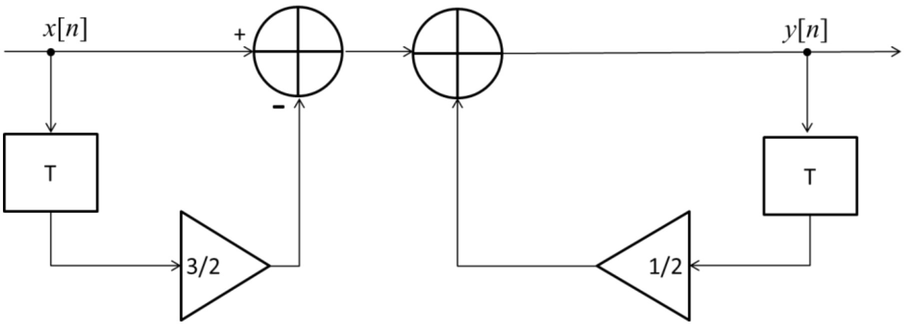
Schemat blokowy S

Odpowiedź impulsową wyznaczamy jako odwrotną transformatę Z transmitancji $H(z)=\frac{1+\frac{1}{4}z^{-1}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{z+\frac{1}{4}}{z+\frac{1}{2}}=\frac{z}{z+\frac{1}{2}}+z^{-1}\frac{\frac{1}{4}z}{z+\frac{1}{2}}$, czyli $h(n)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdot\mathbf{1}(n)+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot\mathbf{1}(n-1)$. Obliczamy kolejne wartości odpowiedzi impulsowej: $h(0)=1$, $h(1)=-0,25$, $h(2)=0,125$, $h(3)=-0,0625$ i t.d.

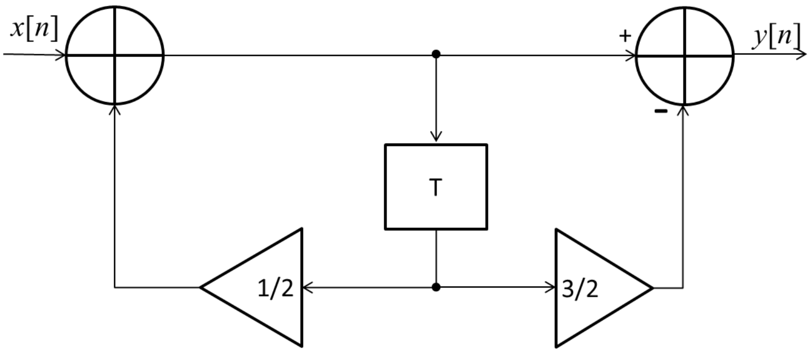


3.4 Transmitancja systemu jest równa $\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1-\frac{3}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, skąd $Y(z)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right) = X(z)\left(1-\frac{3}{2}z^{-1}\right)$. Dalej

$Y(z)-\frac{1}{2}z^{-1}Y(z) = X(z)-\frac{3}{2}z^{-1}X(z)$, więc równanie systemu ma postać: $y(n)-\frac{1}{2}y(n-1) = x(n)-\frac{3}{2}x(n-1)$. Przekształcamy je do postaci $y(n)=\frac{1}{2}y(n-1)+x(n)-\frac{3}{2}x(n-1)$ i na tej podstawie rysujemy schemat blokowy



Sprowadzamy ten schemat do postaci bezpośredniej II:



Odpowiedź impulsową wyznaczamy jako odwrotną transformatę Z transmitancji:

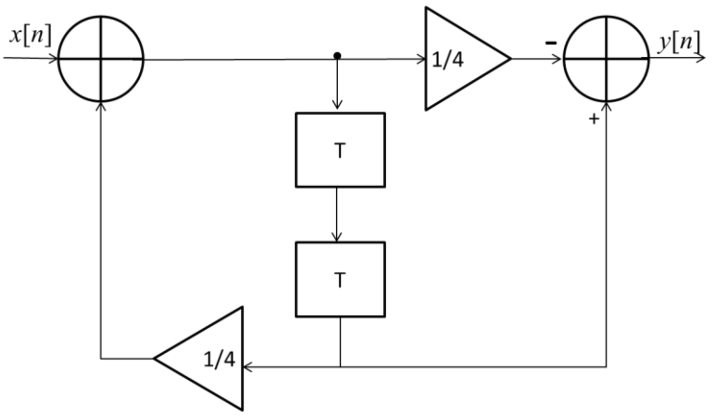
$H(z) = \frac{1-\frac{3}{2}z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{z-\frac{3}{2}}{z-\frac{1}{2}} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}} - z^{-1}\frac{\frac{3}{2}z}{z-\frac{1}{2}}$, czyli $h(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \mathbf{1}(n) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \mathbf{1}(n-1)$.

3.5 Na podstawie równania systemu $y(n)-\frac{1}{4}y(n-2) = x(n-2)-\frac{1}{4}x(n)$ wyznaczamy transmitancję $H(z) = \frac{z^{-2}-\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{4}z^{-2}} = \frac{1-\frac{1}{4}z^2}{z^2-\frac{1}{4}}$. Charakterystyka częstotliwościowa jest równa: $H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1-\frac{1}{4}e^{j2\Omega}}{e^{j2\Omega}-\frac{1}{4}}$, a charakterystyka amplitudowa:

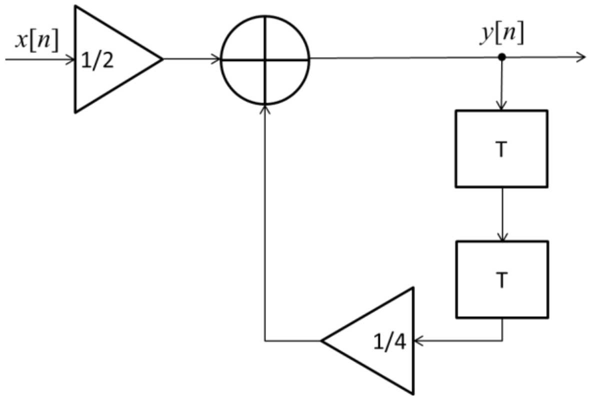
$$A(\Omega)=\left|H\left(e^{j\Omega}\right)\right|=\frac{\left|1-\frac{1}{4}e^{j2\Omega}\right|}{\left|e^{j2\Omega}-\frac{1}{4}\right|}=\frac{\left|1-\frac{1}{4}\cos 2\Omega-\frac{1}{4}j\sin 2\Omega\right|}{\left|\cos 2\Omega-\frac{1}{4}+j\sin 2\Omega\right|}=\frac{\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\cos 2\Omega\right)^2+\frac{1}{16}\sin^2 2\Omega}}{\sqrt{\left(\cos 2\Omega-\frac{1}{4}\right)^2+\sin^2 2\Omega}}=\frac{\sqrt{\frac{17}{16}-\frac{1}{2}\cos 2\Omega}}{\sqrt{\frac{17}{16}-\frac{1}{2}\cos 2\Omega}}=1\,.$$

Jest to filtr wszechprzepustowy o stałym wzmocnieniu równym 1 w paśmie $|\Omega|\le\pi$.

Schemat blokowy w postaci bezpośredniej II



3.6 Z transmitancji wyznaczamy równanie systemu w dziedzinie z: $4Y(z)-z^{-2}Y(z)=2X(z)$ i dalej w dziedzinie czasu dyskretnego $4y(n)-y(n-2)=2x(n)$, $y(n)=\frac{1}{4}y(n-2)+\frac{1}{2}x(n)$. Schemat blokowy:

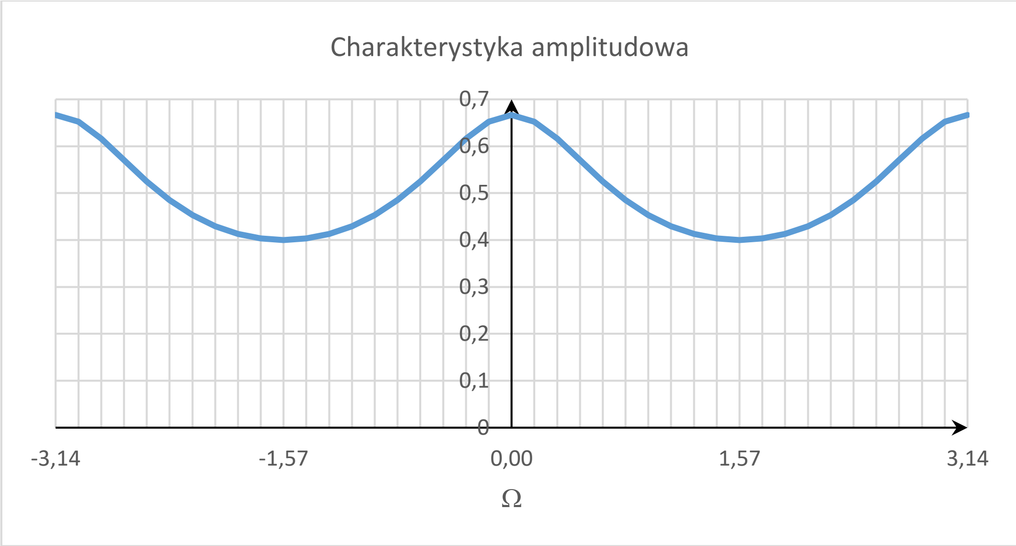


Odpowiedź impulsową wyznaczamy rozkładając $H(z)/z$ na ułamki proste

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{2z}{4z^2-1}=\frac{2z}{(2z-1)(2z+1)}=\frac{A}{2z-1}+\frac{B}{2z+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\left(z-\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{2\left(z+\frac{1}{2}\right)}\right),\qquad \text{czyli}\qquad H(z)=\frac{1}{4}\left(\frac{z}{z-\frac{1}{2}}+\frac{z}{z+\frac{1}{2}}\right).$$

Odpowiedź impulsowa jest równa $h(n)=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]\cdot\mathbf{1}(n)$.

Wyznaczamy charakterystykę amplitudową: $A(\Omega)=\dfrac{2}{\left|4-\cos 2\Omega+j\sin 2\Omega\right|}=\dfrac{2}{\sqrt{17-8\cos 2\Omega}}$ i rysujemy jej wykres w przedziale $|\Omega|\le\pi$:



3.7 Na podstawie danych $h(n)=\delta(n)+2\delta(n-2)$. Transmitancja systemu jest transformatą Z odpowiedzi impulsowej: $H(z)=1+2z^{-2}$. Równanie „wejście-wyjście" jest równe $y(n)=x(n)+2x(n-2)$. Jest to filtr SOI o prostym schemacie blokowym. Wyznaczmy charakterystykę amplitudową:

$A(\Omega)=\left|1+2e^{-j2\Omega}\right|=\left|1+2\cos 2\Omega-2j\sin 2\Omega\right|=\sqrt{5+4\cos 2\Omega}$.