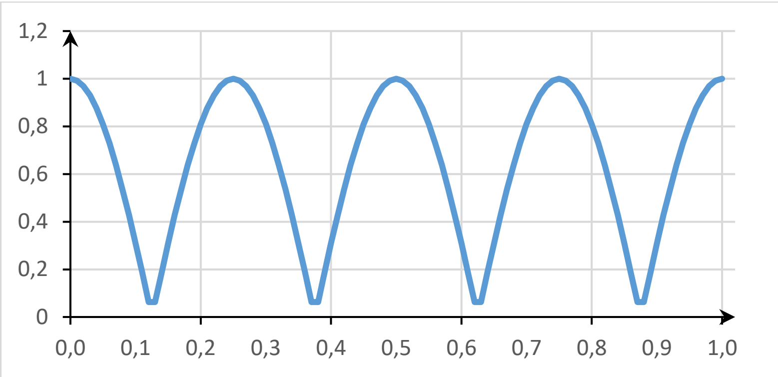
Odpowiedzi do przykładowych zadań do kolokwium 1 – ASiSP

semestr letni 2019

W niektórych rozwiązaniach ze względów praktycznych pominięto rysowanie prostych wykresów. Rozwiązania zawierają tylko szkice rozwiązań.

Parametry i operacje na sygnałach

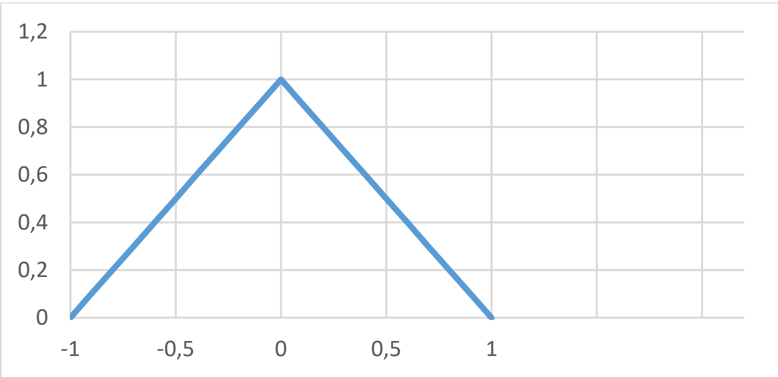
1. Wykres sygnału a) został wygenerowany w Excelu



$x(t)$ - sygnał energii, $E_x = 0{,}5$

$\bar{x} = 2/\pi$

2.



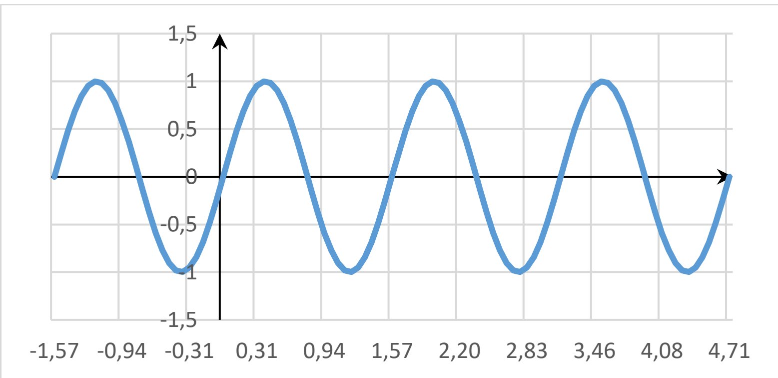
$x(t)$ - sygnał energii, $E_x = \frac{2}{3}$

Wykres sygnału $y(t)$ otrzymujemy powielając $x(t)$ z okresem 4.

$y(t)$ - sygnał mocy

$$P_y = \frac{4E_x}{T_0} = \frac{2}{3}$$

3.



$x(t)$ - sygnał energii, $E_x = \pi, \bar{x} = 0$

$y(t)$ - sygnał mocy, $P_y = \frac{E_x}{T_0} = \frac{1}{3}, \bar{y} = 0$

4. Oba sygnały należą do klasy sygnałów o ograniczonej energii.

$$x(t) = r(t+1) - 2 \cdot r(t) + r(t-1), E_x = \frac{2}{3}$$

$$y(t)=r(t+2)-r(t+1)-r(t-1)+r(t-2), E_x=\frac{8}{3}$$

5. Funkcja autokorelacji wyznaczona z wykorzystaniem przekształcenia Fouriera

1) $x(t)=A\Pi\left(\dfrac{t-\frac{3}{2}T}{T}\right)$, $X(\omega)=ATSa\left(\omega\dfrac{T}{2}\right)e^{-j\frac{3}{2}T\omega}$, $\left|X(\omega)\right|^2=A^2T^2Sa^2\left(\omega\dfrac{T}{2}\right)$,

$$R_x(\tau)=F^{-1}\left\{\left|X(\omega)\right|^2\right\}=A^2T\cdot\Lambda\left(\frac{\tau}{T}\right),\ E_x=R_x(0)=A^2T$$

2) *nie rozwiązujemy – zbyt żmudne całkowanie ;-)*

6. a) $x_p(t)=\frac{1}{2}e^{-\alpha|t|}$, $x_n(t)=\frac{1}{2}e^{-\alpha|t|}\mathrm{sgn}(t)$; **b)** $x_p(t)=\frac{1}{2}e^{-\alpha|t|}\sin(\omega_0 t)\mathrm{sgn}(t)$, $x_n(t)=\frac{1}{2}e^{-\alpha|t|}\sin(\omega_0 t)$; **c)** $x_p(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}A\cos(\omega_0 t)$, $x_n(t)=-\frac{\sqrt{2}}{2}A\sin(\omega_0 t)$; **d)** $x_p(t)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\alpha|t|}\right)$, $x_n(t)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\alpha|t|}\right)\mathrm{sgn}(t)$.

7. Autosplot wyznaczony z wykorzystaniem przekształcenia Fouriera (twierdzenie o splocie)

1) $x(t)=A\Pi\left(\dfrac{t-\frac{1}{2}T}{3T}\right)$, $X(\omega)=3ATSa\left(\omega\dfrac{3T}{2}\right)e^{-j\frac{T}{2}\omega}$, $X^2(\omega)=9A^2T^2Sa^2\left(\omega\dfrac{3T}{2}\right)e^{-jT\omega}$

$$x(t)*x(t)=F^{-1}\left\{X^2(\omega)\right\}=3A^2T\cdot\Lambda\left(\frac{t-T}{3T}\right)$$

2) *nie rozwiązujemy – zbyt żmudne całkowanie ;-)*

8. a) $R_{12}(\tau)=R_{21}(\tau)=\begin{cases}2-\frac{2}{\sqrt{e}}\cosh(\tau) & \text{dla } |\tau|\le\frac{1}{2}\\ \left(\sqrt{e}-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)e^{-|\tau|} & \text{dla } |\tau|>\frac{1}{2}\end{cases}$

b) $R_{12}(\tau)=\begin{cases}\frac{1}{2}\tau^2+2\tau+2 & \text{dla} -2<\tau\le-1\\ -\frac{3}{2}\tau^2-2\tau & \text{dla} -1<\tau\le 0\\ \frac{3}{2}\tau^2-2\tau & \text{dla } 0<\tau\le 1\\ -\frac{1}{2}\tau^2+2\tau-2 & \text{dla } 1<\tau\le 2\\ 0 & \text{dla } |\tau|\ge 2\end{cases}$; $R_{21}(\tau)=R_{12}(-\tau)=-R_{12}(\tau)$

9. Jeżeli $\omega\neq 1$ i $\omega\neq 2$, to $R_{12}(\tau)=R_{21}(\tau)=0, \forall\tau\in\mathbb{R}$

Jeżeli $\omega=1$: $R_{12}(\tau)=-\frac{1}{2}je^{j\tau}$, $R_{21}(\tau)=\frac{1}{2}je^{j\tau}$; jeżeli $\omega=2$: $R_{12}(\tau)=\frac{1}{2}e^{j2\tau}$, $R_{21}(\tau)=\frac{1}{2}e^{j2\tau}$

Szereg i transformata Fouriera

10.

a) a) $x_1(t)=\dfrac{3}{2}+\sin(\pi t)-\cos(\pi t)-\dfrac{1}{2}\cos(2\pi t)$, $f_0=1/2$

Szereg trygonometryczny Fouriera (postać I): $x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$

Widma amplitudowe (jednostronne): $A_0 = 3/2, A_1 = \sqrt{2}, A_2 = 1/2$.

Widmo fazowe (jednostronne): $\varphi_1 = \frac{5\pi}{4}, \varphi_2 = \pi$.

Szereg trygonometryczny Fouriera (postać II): $x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t)$

Współczynniki: $A_0 = 3/2, a_1 = -1, a_2 = -1/2, b_1 = 1, b_2 = 0$

Szereg zespolony Fouriera: $x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{j2\pi n f_0 t}$, współczynniki: $c_{-2} = \frac{1}{4} e^{-j\pi}$, $c_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{j5\pi/4}$, $c_{-1} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-j5\pi/4}$

$c_2 = c_{-2}^* = \frac{1}{4} e^{j\pi}$, $c_0 = 3/2$

Widmo amplitudowe (dwustronne) $\{|c_n|, n \in \mathbb{Z}\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{4}\right\}, n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Widmo fazowe (dwustronne) $\{\arg c_n, n \in \mathbb{Z}\} = \{-\pi, -5\pi/4, 0, 5\pi/4, \pi\}, n \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Moc z tw. Parsevala: $P_x = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2$, $P_x = 27/8$

b) $x_2(t) = 2\sin(2\pi t) - \cos(2{,}1\pi t) = 2\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(2{,}1\pi t + \pi)$.

Częstotliwość podstawową wyznaczamy jako: $f_0 = 1/T_0$, $T_0 = NWW\left(1, \frac{20}{21}\right) = 20$. Sygnał jest sumą 20-tej i 21-ej harmonicznej.

Szereg trygonometryczny Fouriera (postać I): $x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$

Widma amplitudowe (jednostronne): $A_0 = 0, A_{20} = 2, A_{21} = 1$.

Widmo fazowe (jednostronne): $\varphi_{20} = -\frac{\pi}{2}, \varphi_{21} = \pi$.

Szereg trygonometryczny Fouriera (postać II): $x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t)$

Współczynniki: $A_0 = 0, a_{20} = 0, a_{21} = -1, b_{20} = 2, b_{21} = 0$

Szereg zespolony Fouriera: $x(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{j2\pi n f_0 t}$, współczynniki: $c_{-21}=\frac{1}{2}e^{-j\pi}$, $c_{-20}=e^{j\pi/2}$, $c_{20}=c_{-20}^{*}=e^{-j\pi/2}$, $c_{21}=c_{-21}^{*}=\frac{1}{2}e^{j\pi}$

Widmo amplitudowe (dwustronne) $\{|c_n|, n\in\mathbb{Z}\}=\left\{\frac{1}{2},1,0,1,\frac{1}{2}\right\}, n\in\{-21,-20,0,20,21\}$

Widmo fazowe (dwustronne) $\{\arg c_n, n\in\mathbb{Z}\}=\left\{-\pi,\frac{\pi}{2},0,-\frac{\pi}{2},\pi\right\}, n\in\{-21,-20,0,20,21\}$

Moc z tw. Parsevala: $P_x=A_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^2}{2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2$, $P_x=5/2$

c) $x_3(t)=\cos\left(\frac{2}{5}t\right)+\sin\left(\frac{1}{7}t\right)=\cos\left(\frac{2}{5}t\right)+\cos\left(\frac{1}{7}t-\frac{\pi}{2}\right)$.

Częstotliwość podstawową wyznaczamy jako: $f_0=1/T_0$, $T_0=NWW(5\pi,14\pi)=70\pi$. Sygnał jest sumą 5-tej i 14-ej harmonicznej: $x_2(t)=\cos\left(\frac{1}{7}t-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\frac{2}{5}t\right)=\cos\left(2\pi 5 f_0 t-\frac{\pi}{2}\right)+\cos(2\pi 14 f_0 t)$.

Szereg trygonometryczny Fouriera (postać I): $x(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(2\pi n f_0 t+\varphi_n)$

Widma amplitudowe (jednostronne): $A_0=0, A_5=1, A_{14}=1$.

Widmo fazowe (jednostronne): $\varphi_5=-\frac{\pi}{2}, \varphi_{21}=0$.

Szereg trygonometryczny Fouriera (postać II): $x(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2\pi n f_0 t)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(2\pi n f_0 t)$

Współczynniki: $A_0=0, a_5=1, a_{14}=0, b_5=0, b_{14}=1$

Szereg zespolony Fouriera: $x(t)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{j2\pi n f_0 t}$, współczynniki: $c_{-14}=c_{14}=\frac{1}{2}$, $c_{-5}=\frac{1}{2}e^{j\pi/2}$, $c_5=c_{-5}^{*}=\frac{1}{2}e^{-j\pi/2}$

Widmo amplitudowe (dwustronne) $\{|c_n|, n\in\mathbb{Z}\}=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}, n\in\{-14,-5,0,5,14\}$

Widmo fazowe (dwustronne) $\{\arg c_n, n\in\mathbb{Z}\}=\left\{0,\frac{\pi}{2},0,-\frac{\pi}{2},0\right\}, n\in\{-14,-5,0,5,14\}$

Moc z tw. Parsevala: $P_x=A_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n^2}{2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n|^2$, $P_x=1$

d) $x_4(t)=3-4\cos(2\pi t)+2\cos(4\pi t)=3+4\cos(2\pi t+\pi)+2\cos(4\pi t)$, $f_0=1$

Szereg trygonometryczny Fouriera (postać I): $x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$

Widma amplitudowe (jednostronne): $A_0 = 3, A_1 = 4, A_2 = 2$.

Widmo fazowe (jednostronne): $\varphi_1 = \pi, \varphi_2 = 0$.

Szereg trygonometryczny Fouriera (postać II): $x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi n f_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(2\pi n f_0 t)$

Współczynniki: $A_0 = 3, a_1 = -4, a_2 = 2, b_1 = b_2 = 0$

Szereg zespolony Fouriera: $x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{j2\pi n f_0 t}$, współczynniki: $c_{-2} = c_2 = 1$, $c_{-1} = 2e^{-j\pi}$, $c_1 = c_{-1}^* = 2e^{-j\pi}$

Widmo amplitudowe (dwustronne) $\{|c_n|, n\in\mathbb{Z}\} = \{1,2,3,2,1\}, n\in\{-2,-1,0,1,2\}$

Widmo fazowe (dwustronne) $\{\arg c_n, n\in\mathbb{Z}\} = \{0,-\pi,0,\pi,0\}, n\in\{-2,-1,0,1,2\}$

Moc z tw. Parsevala: $P_x = A_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2}{2} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$, $P_x = 19$

11. $x(t) = 2 + 3\cos(20\pi t) - \frac{1}{2}\sin(30\pi t) = 2 + 3\cos(20\pi t) + \frac{1}{2}\cos\left(30\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, $f_0 = 5$

Częstotliwość podstawową wyznaczamy jako: $f_0 = 1/T_0$, $T_0 = NWW\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{15}\right) = \frac{1}{5}$ lub jako $f_0 = NWD(10,15) = 5$. Sygnał jest sumą składowej stałej oraz 2-tej i 3-ej harmonicznej:
$x(t) = 2 + 3\cos(20\pi t) + \frac{1}{2}\cos\left(30\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 2 + 3\cos(2\pi 2 f_0 t) + \frac{1}{2}\cos\left(2\pi 3 f_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Szereg trygonometryczny Fouriera (postać I): $x(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_0 t + \varphi_n)$

Widma amplitudowe (jednostronne): $A_0 = 2, A_2 = 3, A_3 = \frac{1}{2}$.

Widmo fazowe (jednostronne): $\varphi_2 = 0, \varphi_3 = \pi/2$.

Szereg zespolony Fouriera: $x(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{j2\pi n f_0 t}$, współczynniki: $c_{-3} = \frac{1}{4}e^{-j\pi/2}$, $c_{-2} = c_2 = 3/2$, $c_3 = c_{-3}^* = \frac{1}{4}e^{j\pi/2}$, $c_0 = 2$

Widmo amplitudowe (dwustronne) $\{|c_n|, n\in\mathbb{Z}\} = \left\{\frac{1}{4}, \frac{3}{2}, 2, \frac{3}{2}, \frac{1}{4}\right\}, n\in\{-3,-2,0,2,3\}$

Widmo fazowe (dwustronne) $\{\arg c_n, n\in\mathbb{Z}\} = \left\{-\frac{\pi}{2}, 0, 0, 0, \frac{\pi}{2}\right\}, n\in\{-3,-2,0,2,3\}$

Moc w paśmie z tw. Parsevala: $P_{[-2f_0,2f_0]} = 8{,}5$.

12. $\frac{2}{\pi}Sa(2t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \Pi\left(\frac{\omega}{4}\right)$, $\frac{3}{4\pi}Sa\left(\frac{3}{2}t\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{\omega}{3}\right)$

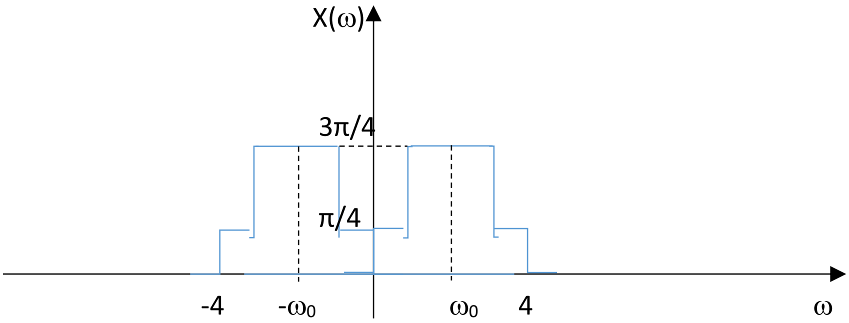
$$X(\omega) = \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{\omega-5}{4}\right) + \frac{1}{2}\Pi\left(\frac{\omega+5}{4}\right) - \frac{1}{4}\Pi\left(\frac{\omega-5}{3}\right) - \frac{1}{4}\Pi\left(\frac{\omega+5}{3}\right).$$

Energię obliczamy z tw. Plancherela: $E_x = \frac{1}{2\pi}\int |X(\omega)|^2 \, d\omega = \frac{7}{16\pi}$.

13. $Sa(t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \pi \cdot \Pi\left(\frac{\omega}{2}\right)$, $Sa(2t) \overset{F}{\Leftrightarrow} \frac{\pi}{2}\Pi\left(\frac{\omega}{4}\right)$

$$X(\omega) = \frac{\pi}{2}\Pi\left(\frac{\omega-\omega_0}{2}\right) + \frac{\pi}{2}\Pi\left(\frac{\omega+\omega_0}{2}\right) + \frac{\pi}{4}\Pi\left(\frac{\omega-\omega_0}{4}\right) + \frac{\pi}{4}\Pi\left(\frac{\omega+\omega_0}{4}\right).$$

Ilustrujemy na wykresie sytuację graniczną, gdy widma na częstotliwościach dodatnich i ujemnych nie nachodzą na siebie i odczytujemy minimalną wartość ω_0



$\omega_{0_{\min}} = 2$, więc $f_{0_{\min}} = 1/\pi$.

14. $x_1(t) = \Pi\left(\frac{t+\tau/2}{\tau}\right) - \Pi\left(\frac{t-\tau/2}{\tau}\right)$.

$$X_1(\omega) = \tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\left(e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}\right) = 2j\tau Sa\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)\sin(\omega\tau/2) = \frac{4j}{\omega}\sin^2(\omega\tau/2)$$

Widmo amplitudowe: $|X_1(\omega)| = \frac{4}{|\omega|}\sin^2(\omega\tau/2)$; widmo fazowe: $\arg X_1(\omega) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn}(\omega)$

15. $X(\omega) = Sa\left(\frac{3}{2}(\omega-\pi)\right) + Sa\left(\frac{3}{2}(\omega+\pi)\right)$.

Z tw. o modulacji: $2x_1(t)\cos(\omega_0 t) \overset{F}{\Leftrightarrow} X_1(\omega-\omega_0) + X_1(\omega+\omega_0)$ otrzymujemy: $\omega_0 = \pi$ oraz $X_1(\omega) = Sa\left(\frac{3}{2}\omega\right)$.

Odwrotna transformacja Fouriera daje: $x_1(t) = \frac{1}{3}\Pi\left(\frac{t}{3}\right)$. Stąd $x(t) = \frac{2}{3}\Pi\left(\frac{t}{3}\right)\cos(\pi t)$. Jest to sygnał energii, którą obliczamy w dziedzinie czasu jako całkę

$E_x = \int_{-3/2}^{3/2} \frac{4}{9}\cos^2(\pi t) = \frac{2}{3}$. Wartość średnia sygnału wynosi $\overline{x} = \frac{1}{3}\int_{-3/2}^{3/2} \frac{2}{3}\cos(\pi t) = -\frac{4}{9\pi}$.

16.

1) $X(\omega) = 2\Pi\left(\frac{\omega-6}{6}\right) - \Pi\left(\frac{\omega-6}{4}\right) + 2\Pi\left(\frac{\omega+6}{6}\right) - \Pi\left(\frac{\omega+6}{4}\right)$, $x(t) = \frac{4}{\pi}[3Sa(3t) - Sa(2t)]\cos(6t)$, $E_x = \frac{12}{\pi}$

2) $X(\omega) = \Pi\left(\frac{\omega-3}{2}\right) + \frac{1}{2}\Lambda(\omega-3) + \Pi\left(\frac{\omega+3}{2}\right) + \frac{1}{2}\Lambda(\omega+3)$, $x(t) = \frac{2}{\pi}Sa(t) + \frac{1}{2\pi}Sa^2\left(\frac{1}{2}t\right)\cos(3t)$, $E_x = \frac{19}{6\pi}$

17. $x_1(t) = \Pi\left(\frac{t}{2}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} 2Sa(\omega) = X_1(\omega)$, $\quad x_2(t) = 2\Pi\left(\frac{t-2}{2}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} 4Sa(\omega)e^{-j2\omega} = X_2(\omega)$

$X_1(\omega)X_2(\omega) = 8Sa^2(\omega)e^{-j2\omega}$, $x_1(t) * x_2(t) = F^{-1}\{8Sa^2(\omega)e^{-j2\omega}\} = 4\Lambda\left(\frac{t-2}{2}\right)$

18. a) Wykres sygnału $x_{T_0}(t)$ otrzymujemy powielając $x(t)$ z okresem 4.

Wyznaczamy widmo sygnału $x(t) = \Lambda(t-1) \overset{F}{\Leftrightarrow} Sa^2\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\omega} = X(\omega)$. Widmo sygnału okresowego $x_{T_0}(t)$ jest równe

$X_{T_0}(\omega) = 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta(\omega - n\omega_0)$, gdzie $\omega_0 = \pi/2$, a współczynniki rozwinięcia w zespolony szereg Fouriera są równe

$c_n = \frac{1}{T_0}X(n\omega_0) = \frac{1}{4}Sa^2\left(\frac{n\pi}{4}\right)e^{-jn\pi/2}$.

Wyznaczamy wartości współczynników dla $n \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$:

$c_0 = 1/4$, $c_1 = \frac{2}{\pi^2}e^{-j\pi/2}$, $\quad c_{-1} = \frac{2}{\pi^2}e^{j\pi/2}$, $\quad c_2 = \frac{1}{\pi^2}e^{-j\pi}$, $\quad c_{-2} = \frac{1}{\pi^2}e^{j\pi}$, $\quad c_3 = \frac{2}{9\pi^2}e^{j\pi/2}$, $\quad c_{-3} = \frac{2}{9\pi^2}e^{-j\pi/2}$.

Widmo amplitudowe: $\{|c_n|, n\in\mathbb{Z}\} = \left\{\frac{2}{9\pi^2}, \frac{1}{\pi^2}, \frac{2}{\pi^2}, \frac{1}{4}, \frac{2}{\pi^2}, \frac{1}{\pi^2}, \frac{2}{9\pi^2}\right\}, n \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

Widmo fazowe: $\{\arg c_n, n\in\mathbb{Z}\} = \left\{-\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2}, -\pi, \frac{\pi}{2}\right\}, n \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

b) Wykres sygnału $x_{T_0}(t)$ otrzymujemy powielając $x(t)$ z okresem 4.

Wyznaczamy widmo sygnału $x(t) = \Pi\left(\frac{t-1}{2}\right) \overset{F}{\Leftrightarrow} 2Sa(\omega)e^{-j\omega} = X(\omega)$. Widmo sygnału okresowego $x_{T_0}(t)$ jest równe

$X_{T_0}(\omega) = 2\pi\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\delta(\omega - n\omega_0)$, gdzie $\omega_0 = \pi/2$, a współczynniki rozwinięcia w zespolony szereg Fouriera są równe

$c_n = \frac{1}{T_0}X(n\omega_0) = \frac{1}{2}Sa\left(\frac{n\pi}{2}\right)e^{-jn\pi/2}$.

Wyznaczamy wartości współczynników dla $n \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$:

$c_0 = 1/2$, $c_1 = -j/\pi$, $\quad c_{-1} = j/\pi$, $\quad c_2 = 0$, $\quad c_{-2} = 0$, $\quad c_3 = -j/3\pi$, $\quad c_{-3} = j/3\pi$.

Widmo amplitudowe: $\{|c_n|, n\in\mathbb{Z}\} = \left\{\frac{1}{3\pi}, 0, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\pi}, 0, \frac{1}{3\pi}\right\}, n \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

Widmo fazowe: $\{\arg c_n, n\in\mathbb{Z}\} = \left\{\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2}, 0, -\frac{\pi}{2}\right\}, n \in \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

19. $E_1 = E_2 = 1$, $|X_1(f)|^2 = \frac{2a_1}{a_1^2+(2\pi f)^2}$, $|X_2(f)|^2 = \frac{2a_2}{a_2^2+(2\pi f)^2}$

$\int_{-f_1}^{f_1} |X_1(f)|^2 df = 0.9E_1 = 0.9$; $2\int_0^{f_1} |X_1(f)|^2 df = 0.9$;

po podstawieniu i scałkowaniu: $\mathrm{arctg}\left(\frac{2\pi f_1}{a_1}\right) = 1.41$, skąd $f_1 \approx a_1$. Analogicznie otrzymujemy: $f_2 \approx a_2$. Ponieważ $a_1 \gg a_2$, więc przesłanie sygnału $x_1(t)$ wymaga szerszego pasma.

Wskazówka $\int \frac{1}{a+x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \mathrm{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{a}}\right), a > 0$