

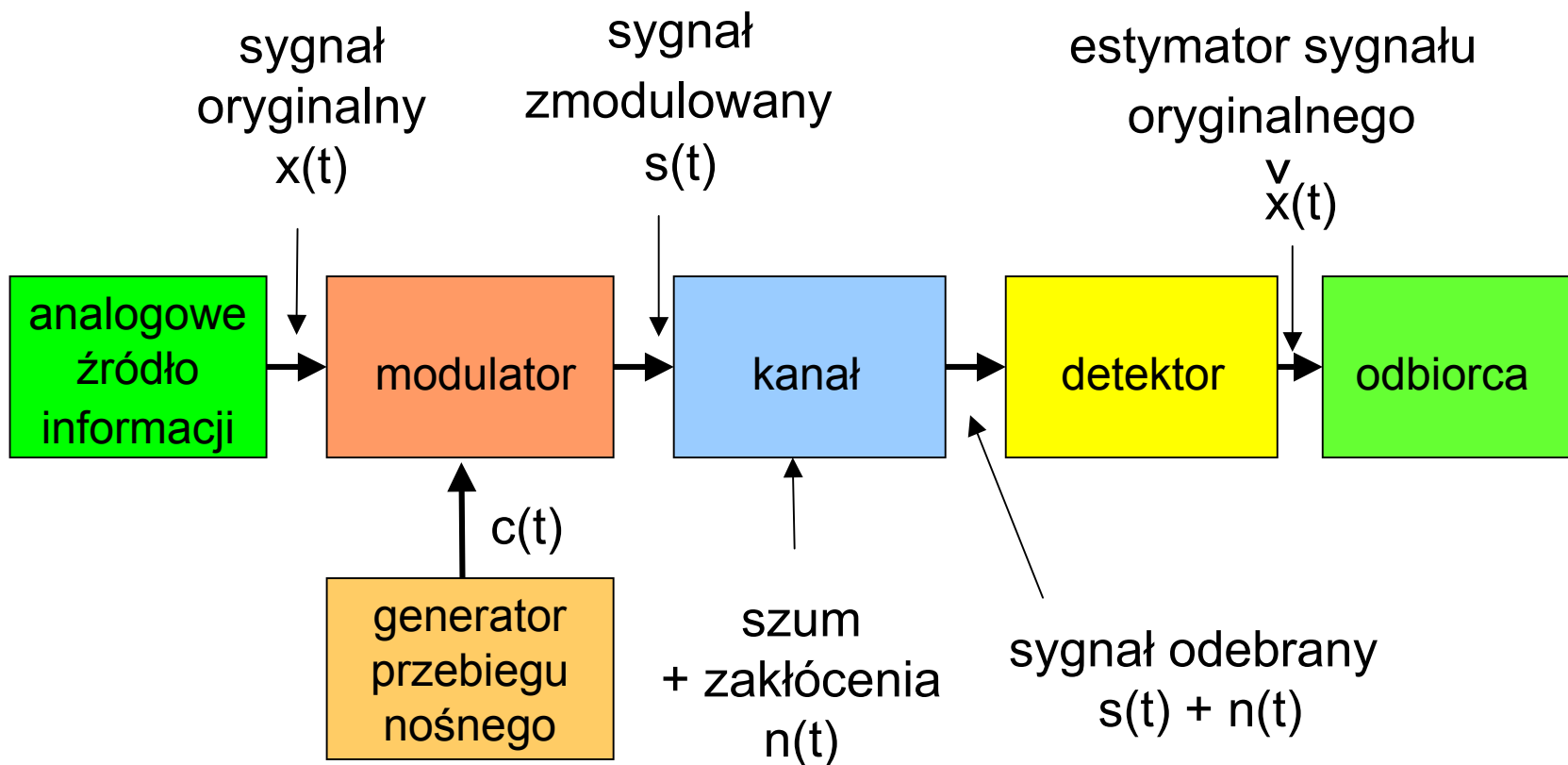
dr inż. Karol Radecki

***MODULACJE
ANALOGOWE AM i FM***

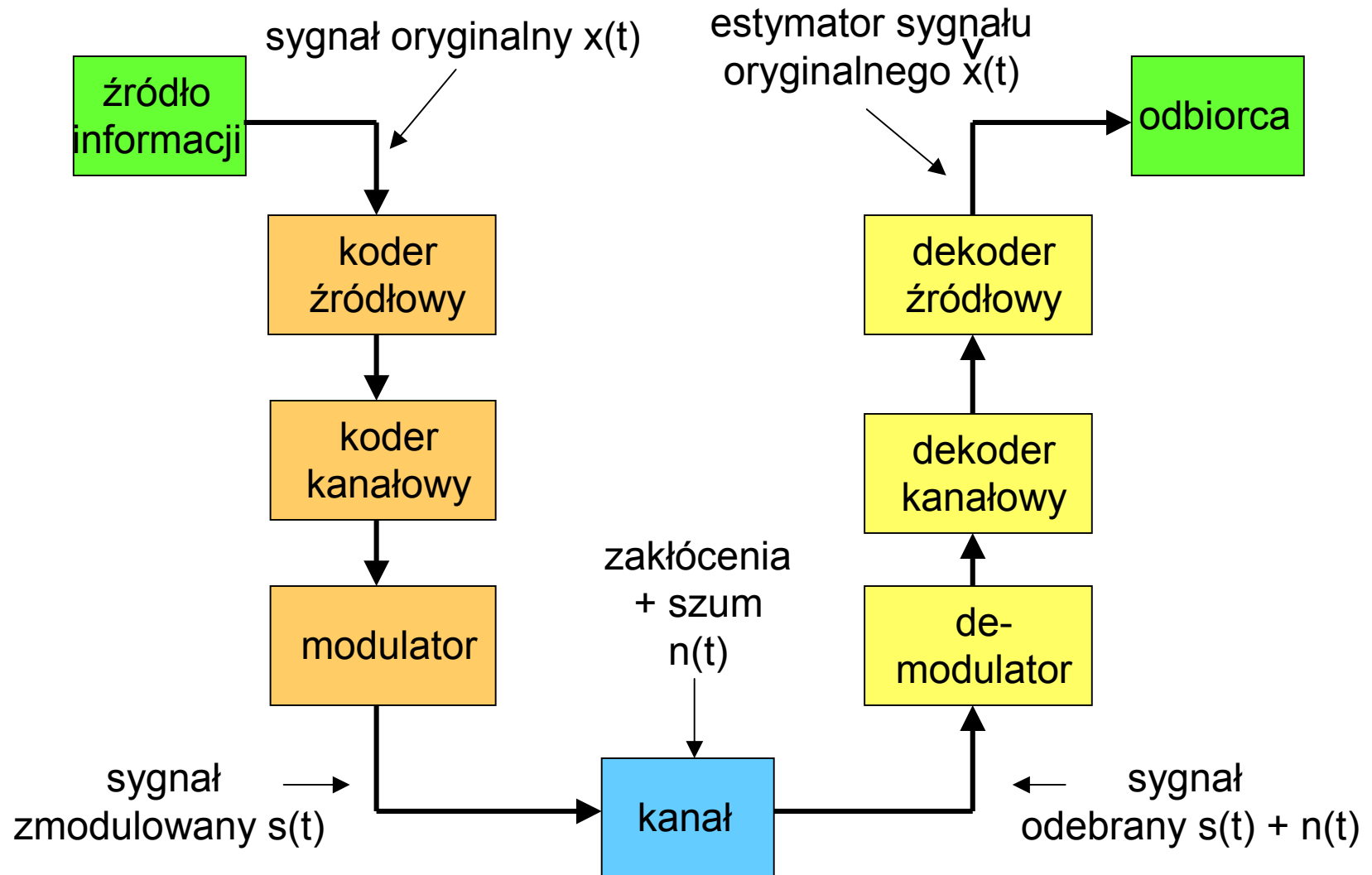
*materiały do wykładu
Teoria Sygnałów i Modulacji*

PODSTAWOWE POJĘCIA I ZALEŻNOŚCI

Analogowy system telekomunikacyjny



Cyfrowy system telekomunikacyjny



Pojęcie operacji modulacji i detekcji

- **Modulacja i demodulacja**

Modulacja jest to operacja, która przyporządkowuje sygnałom modulującym sygnały zmodulowane.

Demodulacja jest procesem odwrotnym względem procesu modulacji

- Sygnał analogowy – sygnał z czasem ciągłym oraz ciągłą skalą wartości
- Sygnał cyfrowy – sygnał z czasem dyskretnym oraz dyskretną skalą wartości

- **Modulacja i demodulacja analogowa**

ciągłe i odwracalne przyporządkowanie sygnału modulującego sygnałowi zmodulowanemu

- **Modulacja i demodulacja cyfrowa**

dyskretne i odwracalne przyporządkowanie sygnału modulującego sygnałowi zmodulowanemu

- **Detekcja**

odtworzenie informacji z sygnału odebranego

Podstawowe przyczyny stosowania modulacji przy przekazie sygnałów

- zwiększenie skuteczności przesyłania sygnałów oryginalnych *dopasowanie widmowe sygnału do charakterystyki przenoszenia kanału, większa sprawność, prostsze rozwiązania techniczne urządzeń nadawczych w zakresie w,cz.*
- możliwość zwielokrotnienia sygnałów oryginalnych przesyłanych przez kanały poprzez zwielokrotnienie częstotliwościowe i czasowe
- możliwość rozdzielenia równocześnie przesyłanych sygnałów na tej samej częstotliwości nośnej (modulatory kwadraturowe)
- uodpornienie transmitowanych sygnałów na szумы i zakłócenia
- sygnały zmodulowane są stosowane w pomiarach i automatyce *zwiększenie dokładności pomiarów i sterowania*

Podstawowe rodzaje modulacji

Modulacje analogowe pasmowe

AM DSB – dwuwstęgowa modulacja amplitudy z falą nośną
AM DSB SC - dwuwstęgowa modulacja amplitudy bez fali nośnej
AM SSB - jednowstęgowa modulacja amplitudy bez fali nośnej
FM – modulacja częstotliwości
PM – modulacja fazy

Modulacje analogowe w paśmie podstawowym

PAM – modulacja amplitudy impulsów
PPM – modulacja położenia impulsów
PDM – modulacja szerokości impulsów

Modulacje cyfrowe w paśmie podstawowym

PCM – modulacja kodowa impulsów
DM - modulacja delta

Modulacje cyfrowe pasmowe

ASK - kluczowanie amplitudy fali nośnej
FSK - kluczowanie częstotliwości fali nośnej
PSK - kluczowanie fazy fali nośnej

Przebieg zmodulowany analityczny i jego parametry

- przebieg nośny analityczny: $z_c(t) = c(t) + j \hat{c}(t) = A_0 \exp(j\omega_0 t)$

$$c(t) = A_0 \cos(\omega_0 t), \quad \hat{c}(t) = A_0 \sin(\omega_0 t),$$

- funkcja modulująca: $m(t) = |m(t)| \exp[j \arg m(t)]$
- przebieg zmodulowany analityczny:

$$z_s(t) = m(t) z_c(t)$$

$$z_s(t) = s(t) + j \hat{s}(t) = |m(t)| A_0 \exp[j(\omega_0 t + \arg m(t))]$$

- amplituda chwilowa: $A(t) = A_0 |m(t)|$
- faza chwilowa: $\phi(t) = \omega_0 t + \arg m(t) = \omega_0 t + \varphi(t)$
- częstotliwość chwilowa:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi(t)}{dt} = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arg m(t) = f_0 + f(t)$$

odchyłka
fazy chwilowej

odchyłka
częstotliwości
chwilowej

Widmo sygnału zmodulowanego

oznaczymy pary transformat Fouriera

$$x(t) \leftrightarrow X(f), \quad m(t) \leftrightarrow M(f)$$

$$s(t) \leftrightarrow S(f), \quad z_s(t) \leftrightarrow Z_s(f) \text{ to}$$

widmo sygnału zmodulowanego analitycznego $z_s(t) = m(t) z_c(t)$:

Mnożenie sygnału $m(t)$ przez $\exp(j\omega_0 t)$ daje przesunięcie widma tego sygnału na osi częstotliwości o wartość f_0

$$Z_s(f) = M(f - f_0) \longleftarrow \text{jest to widmo jednostronne}$$

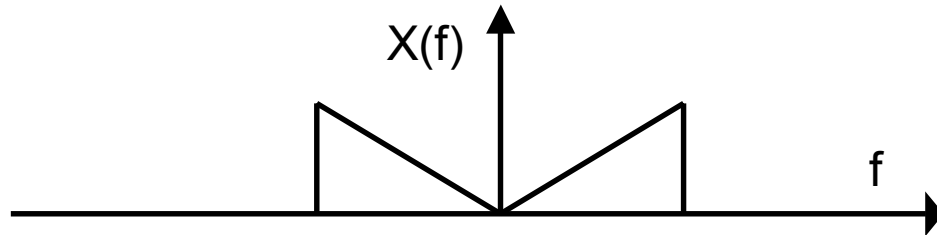
widmo sygnału zmodulowanego rzeczywistego $s(t)$

$$S(\omega) = \frac{1}{2} M(f - f_0) + \frac{1}{2} M^*(-f - f_0)$$

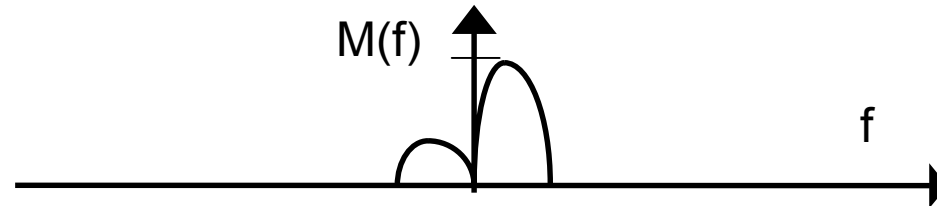
widmo sprzężone

Widmo sygnału zmodulowanego

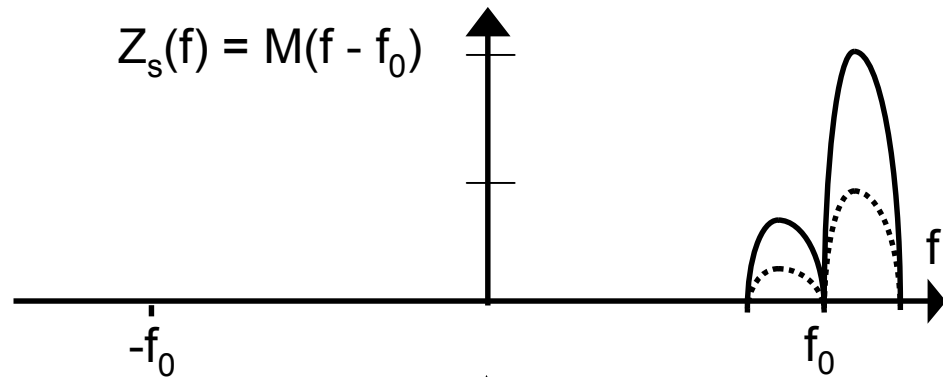
widmo sygnału
modulującego



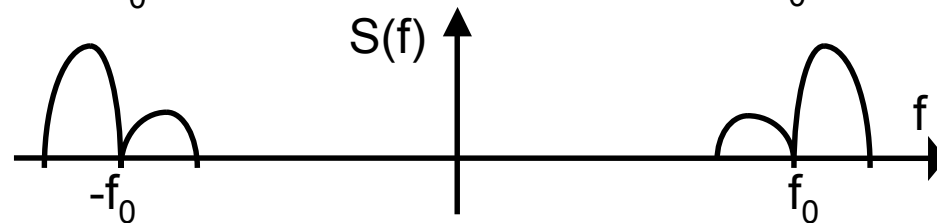
widmo funkcji
modulującej



widmo sygnału
zmodulowanego
analitycznego



widmo sygnału
zmodulowanego
rzeczywistego



MODULACJE ANALOGOWE PASMOWE

Funkcje modulujące

modulacja	funkcja modulująca $m(t)$
AM DSB	$1+k x(t)$
AM DSB SC	$k x(t)$
AM SSB SC	
górną wstęgą	$x(t) + j \hat{x}(t)$
dolną wstęgą	$x(t) - j \hat{x}(t)$
FM	$\exp[j2\pi k_f \int x(t)dt]$
PM	$\exp[jk_\phi x(t)]$

k, k_f, k_ϕ - stałe modulatora; $\hat{x}(t)$ – transformata Hilberta sygnału $x(t)$

$$\hat{x}(t) = x(t) * \left(\frac{1}{\pi t} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad x(t) = \hat{x}(t) * \left(\frac{-1}{\pi t} \right) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau,$$

DWUWSTĘGOWA MODULACJA AMPLITUDY Z FALĄ NOŚNĄ

AM - Amplitude Modulation

- funkcja modulująca:

$$m(t) = 1 + k x(t) \geq 0 \quad \leftarrow \text{brak przemodulowania}$$

k - stała modulatora

- przebieg nośny analityczny: $z_c(t) = c(t) + j \hat{c}(t) = A_0 \exp(j\omega_0 t)$

$$c(t) = A_0 \cos(\omega_0 t), \quad \hat{c}(t) = A_0 \sin(\omega_0 t)$$

- przebieg zmodulowany analityczny: $z_s(t) = [1 + k x(t)] A_0 \exp(j\omega_0 t)$
- przebieg zmodulowany rzeczywisty:

$$s(t) = [1 + k x(t)] A_0 \cos(\omega_0 t)$$

- amplituda chwilowa (obwiednia)

$$A(t) = A_0 |m(t)| = A_0 [1 + k x(t)]$$

- widmo sygnału zmodulowanego

$$S(f) = (k A_0/2) [X(f + f_0) + X(f - f_0)] + (A_0/2) [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

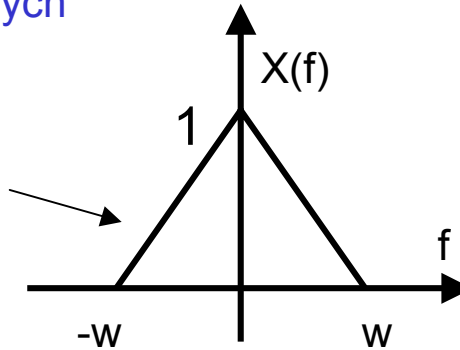
Widmo sygnału zmodulowanego

$$S(f) = (k A_0/2) [X(f + f_0) + X(f - f_0)] + (A_0/2) [\delta(f + f_0) + \delta(f - f_0)]$$

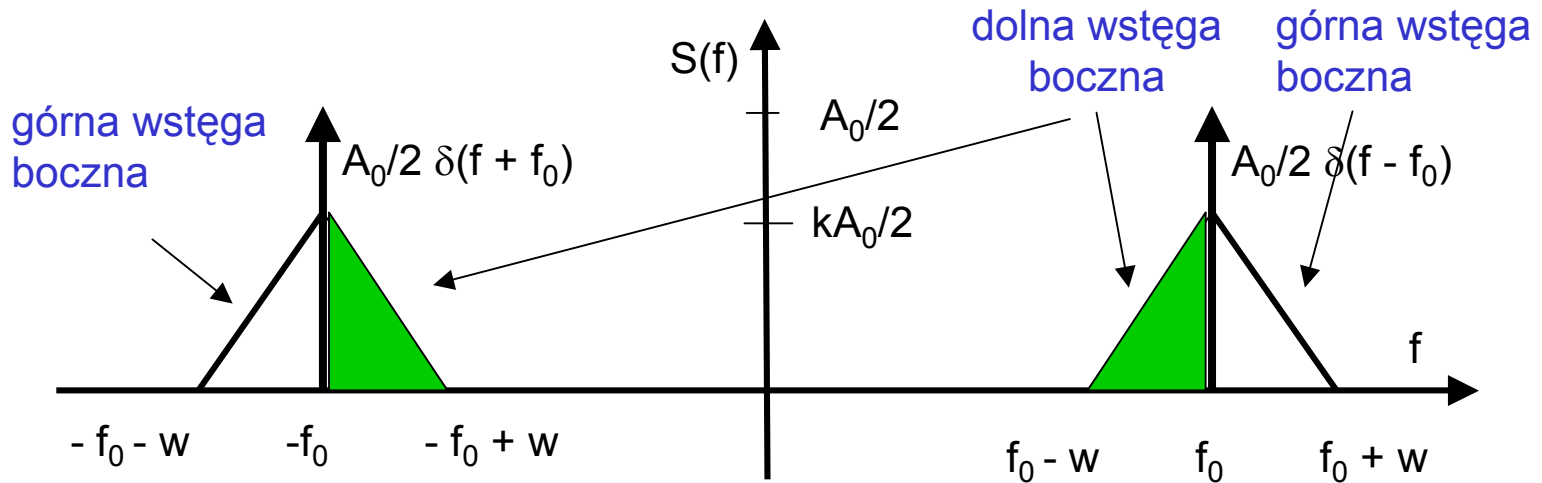
widmo wstęg bocznych

widmo przebiegu nośnego

widmo sygnału
modulującego



$$w \ll f_0$$



Modulacja sygnałem kosinusoidalnie zmiennym, $m < 1$

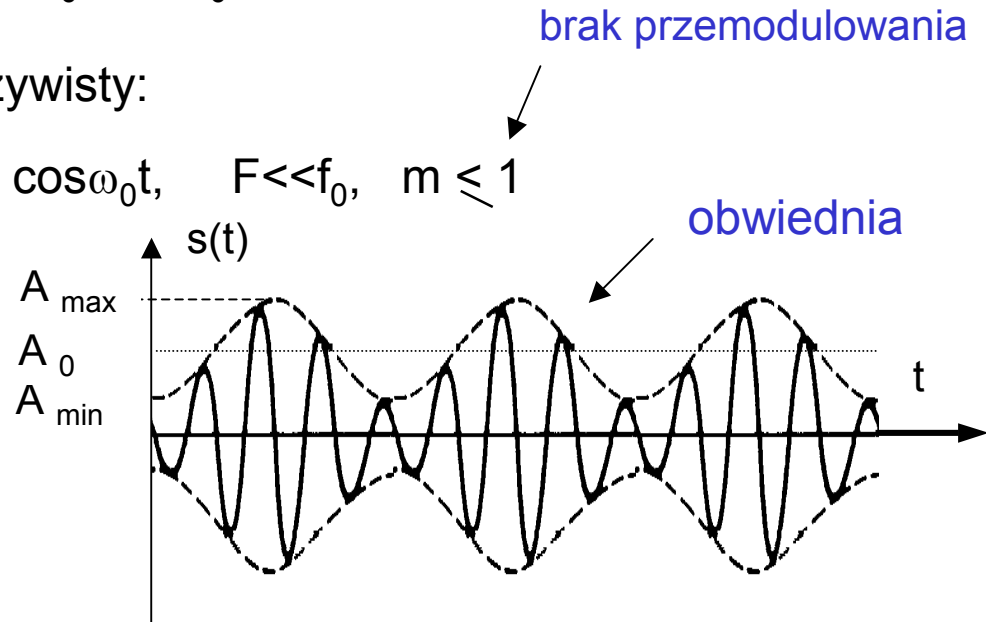
- sygnał modulujący: $x(t) = U \cos \Omega t$, $\Omega = 2\pi F t$
- przebieg nośny: $c(t) = A_0 \cos(\omega_0 t)$

- sygnał zmodulowany rzeczywisty:

$$s(t) = A_0 (1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t, \quad F \ll f_0, \quad m \leq 1$$

głębokość modulacji

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}} = \frac{kU}{A_0}$$



- widmo Fouriera sygnału zmodulowanego

$$S(f) = A_0/2 [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)] + mA_0/4 [\delta(f - f_0 - F) + \delta(f + f_0 + F)] + \\ + mA_0/4 [\delta(f - f_0 + F) + \delta(f + f_0 - F)]$$

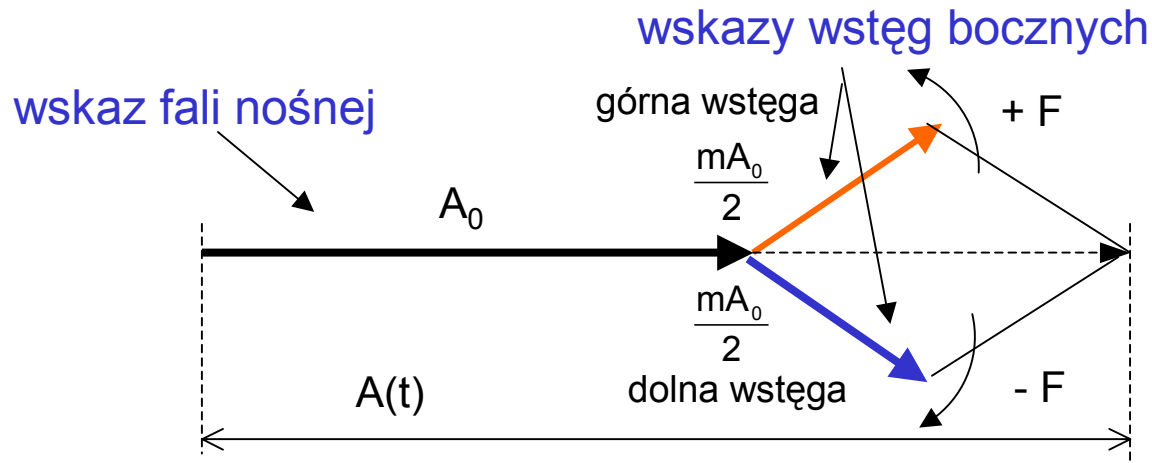
Modulacja sygnałem kosinusoidalnie zmiennym, $m < 1$

- sygnał modulujący $x(t) = U \cos \Omega t$
- przebieg nośny: $c(t) = A_0 \cos(\omega_0 t)$
- sygnał zmodulowany analityczny:

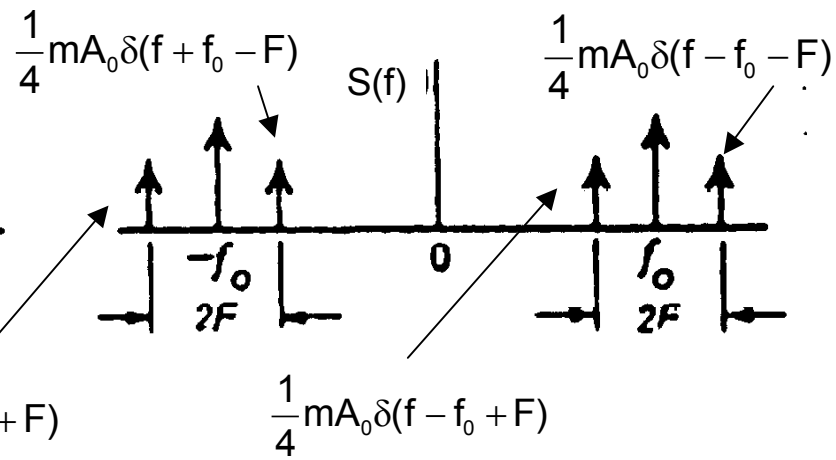
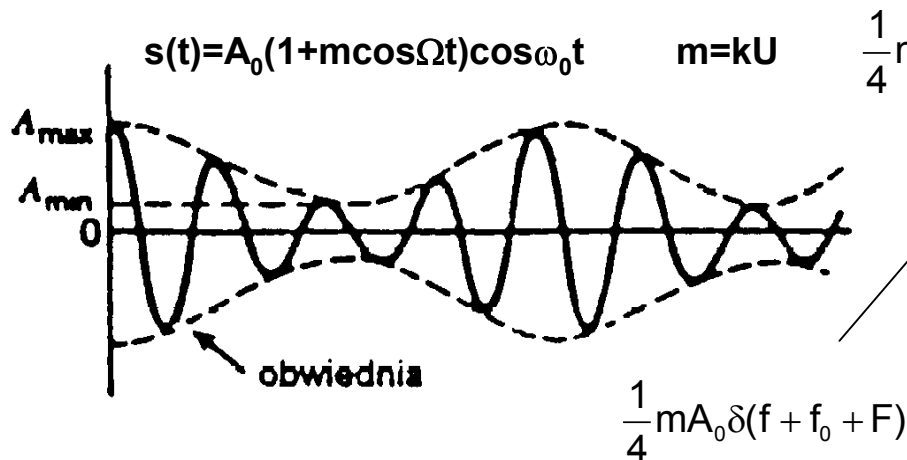
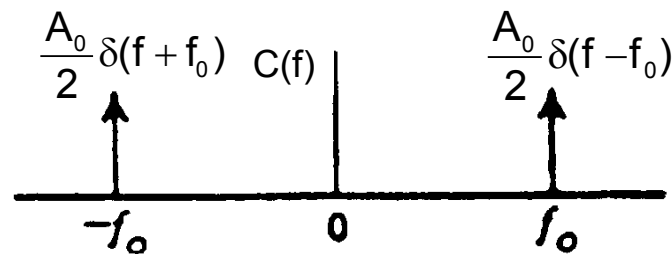
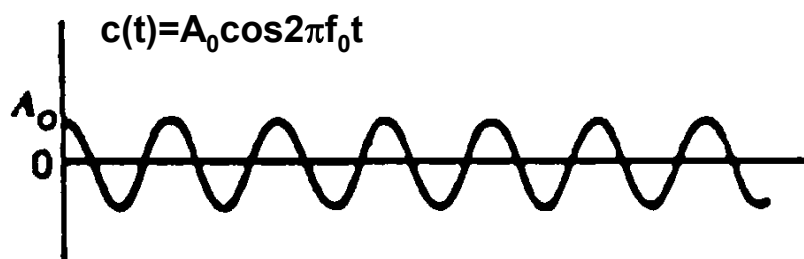
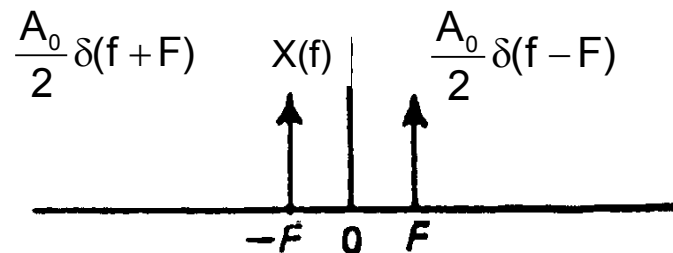
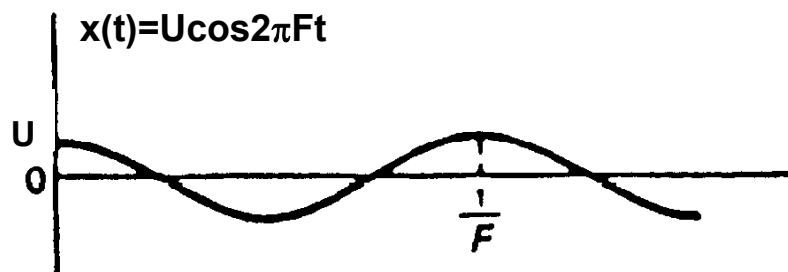
$$z_s(t) = A_0(1 + m \cos \Omega t) e^{j\omega_0 t}, \quad m = \frac{kU}{A_0}$$

$$z_s(t) = A_0 e^{j\omega_0 t} + \frac{mA_0}{2} e^{j(\omega_0 t + \Omega)t} + \frac{mA_0}{2} e^{j(\omega_0 t - \Omega)t}$$

- wykres wskazowy modulacji:



Modulacja sygnałem kosinusoidalnie zmiennym, $m < 1$

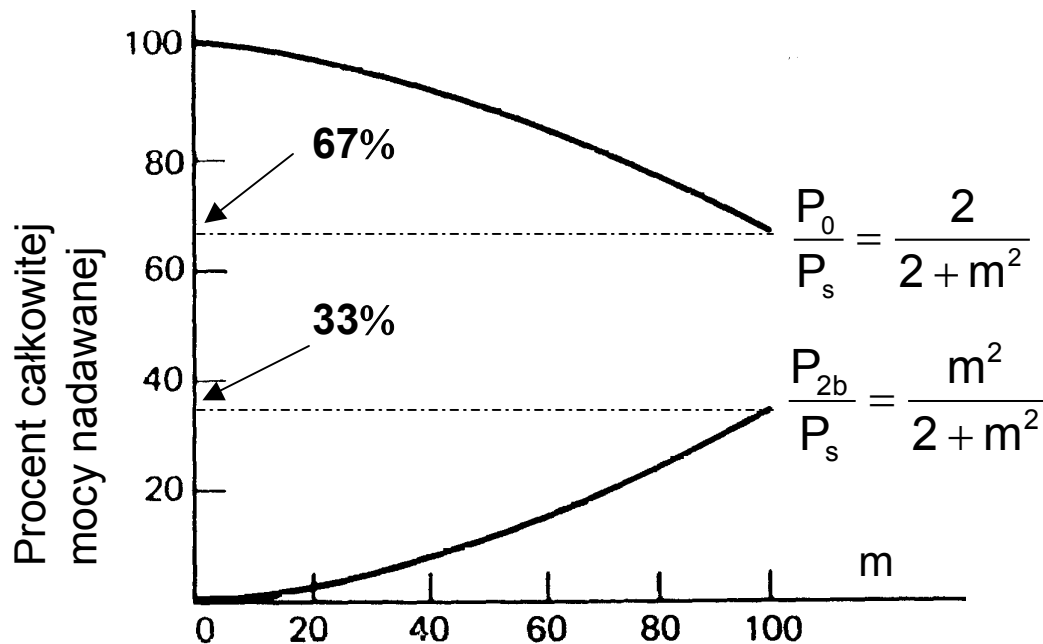


Modulacja sygnałem kosoidalnie zmiennym, $m < 1$

- średnia moc sygnału zmodulowanego za okres m.cz.

$$P_s = P_0 \left(1 + \frac{m^2}{2}\right) = P_0 + P_0 \frac{m^2}{2} = P_0 + 2P_b \quad P_0 \leq P_s \leq 1,5P_0$$

- sprawność energetyczna modulacji AM



- moc chwilowa sygnału zmodulowanego za okres w.cz

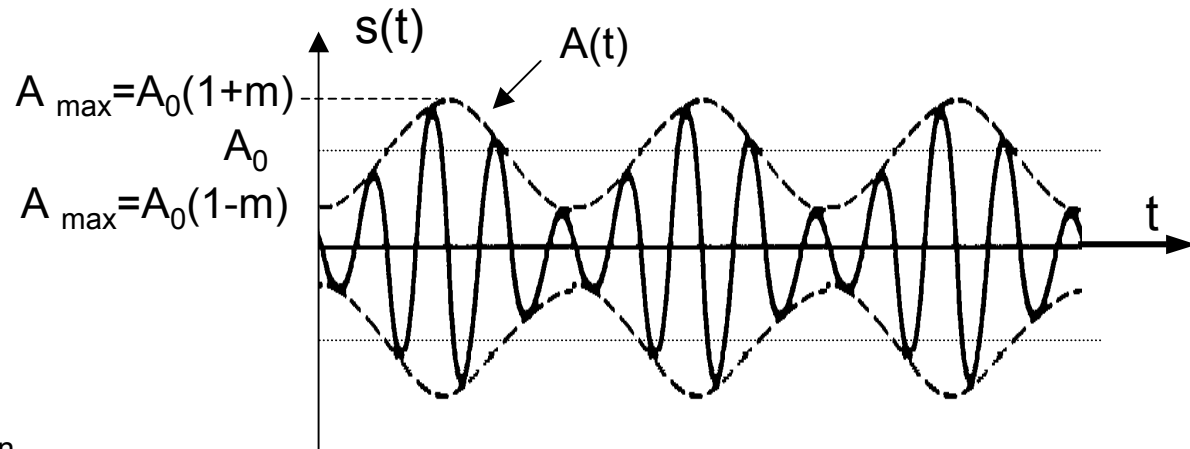
$$P = P_0(1 + m \sin \Omega t)^2 \quad 0 \leq P \leq 4P_0$$

Modulacja sygnałem kosinusoidalnie zmiennym, $m > 1$

LINIOWA

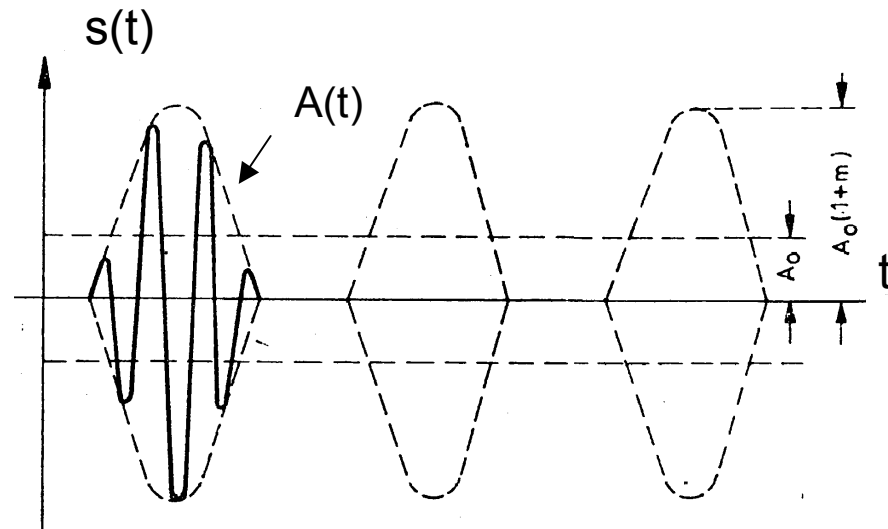
$$m < 1$$

$$m = \frac{A_{\max} - A_{\min}}{A_{\max} + A_{\min}}$$

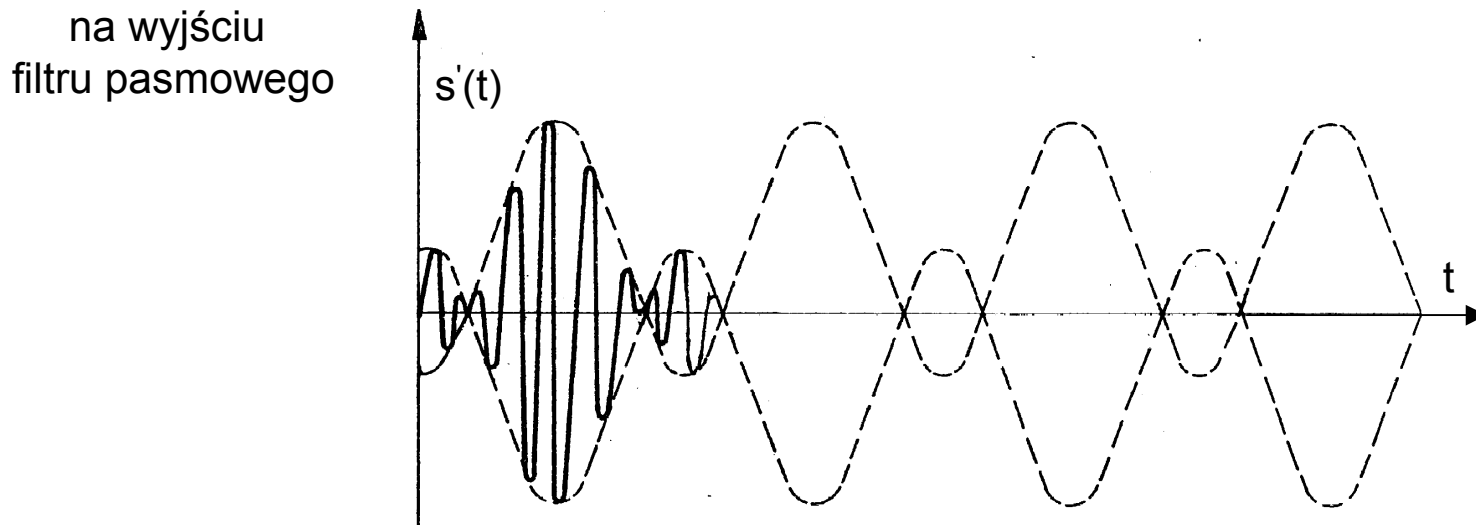
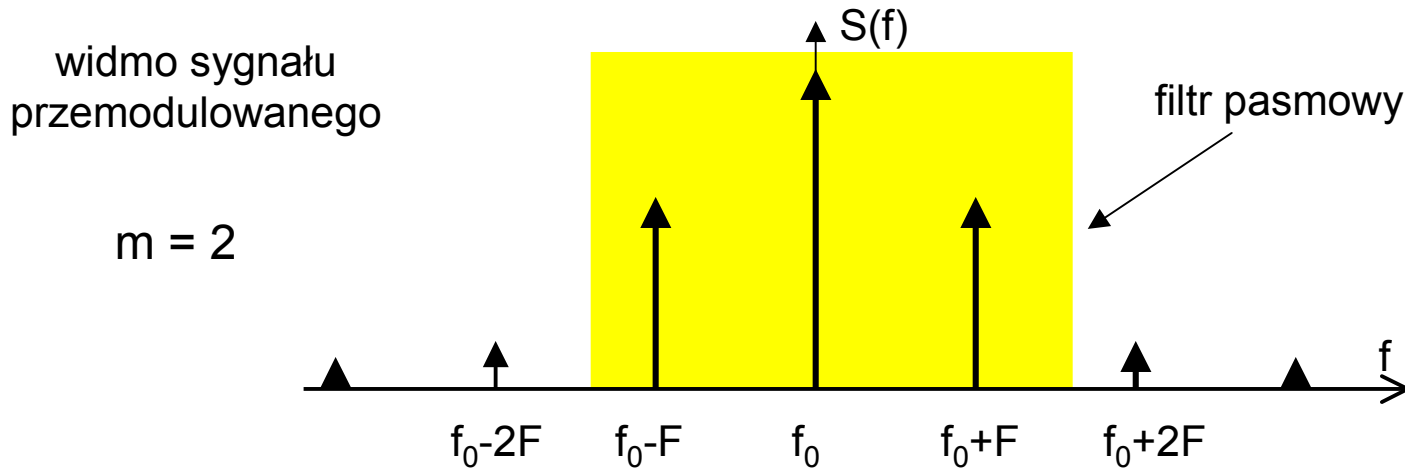


NIELINIOWA

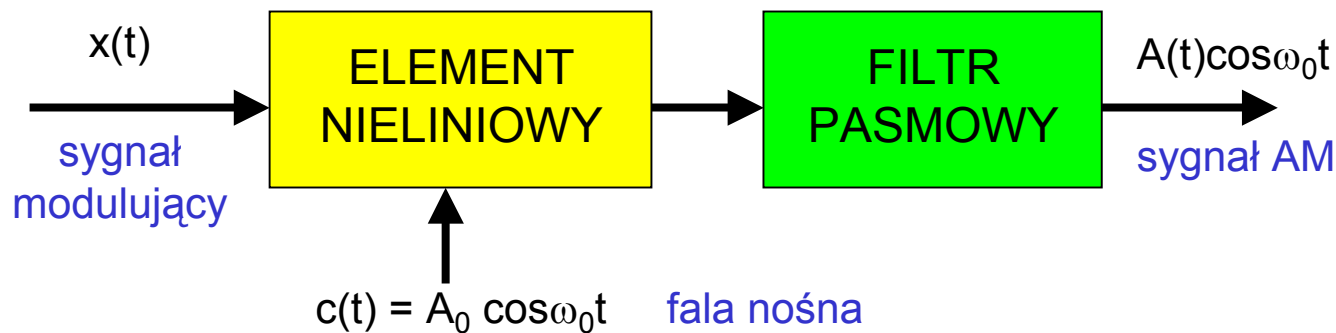
$$m = 2$$



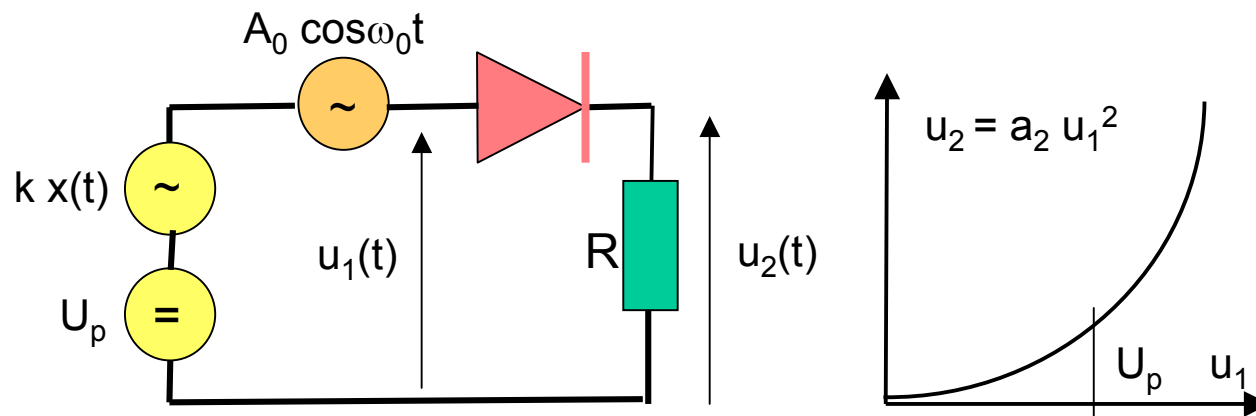
Modulacja sygnałem kosoidalnie zmiennym, $m > 1$



Modulator AM



Modulator kwadratowy

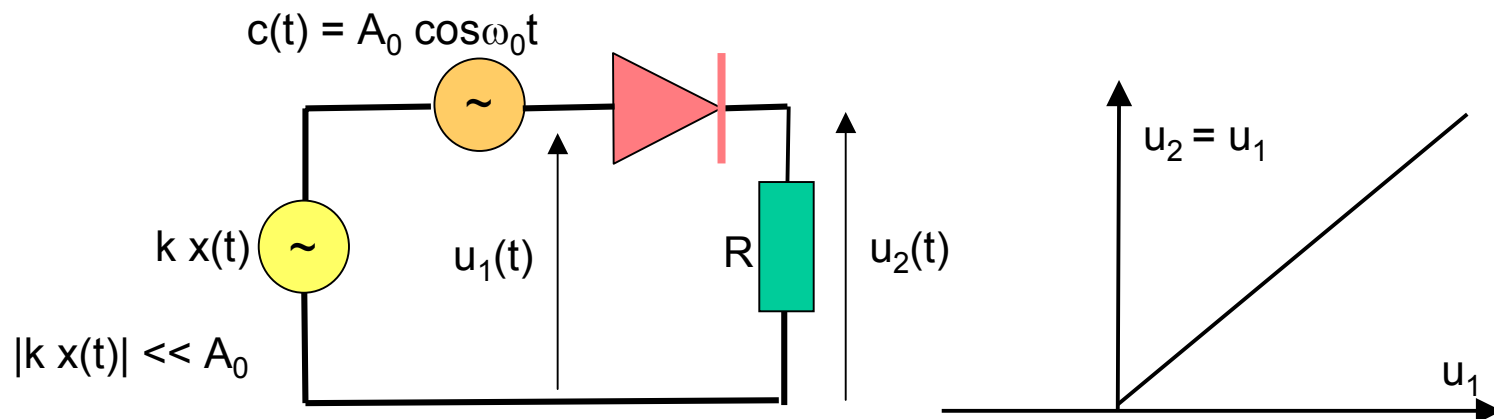


$$u_1(t) = U_p + kx(t) + A_0 \cos \omega_0 t$$

$$u_2(t) = a_2[U_p^2 + 2kU_p x(t) + k^2 x^2(t)] + a_2[2U_p A_0 \cos \omega_0 t + 2kx(t)A_0 \cos \omega_0 t] + a_2 A_0^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$u_2(t) = (2U_p A_0 \cos \omega_0 t + 2A_0 kx(t) \cos \omega_0 t)a_2 = 2U_p A_0 a_2 [1 + mx(t)] \cos \omega_0 t, \quad m = \frac{k}{U_p a_2}$$

Modulator przełączający

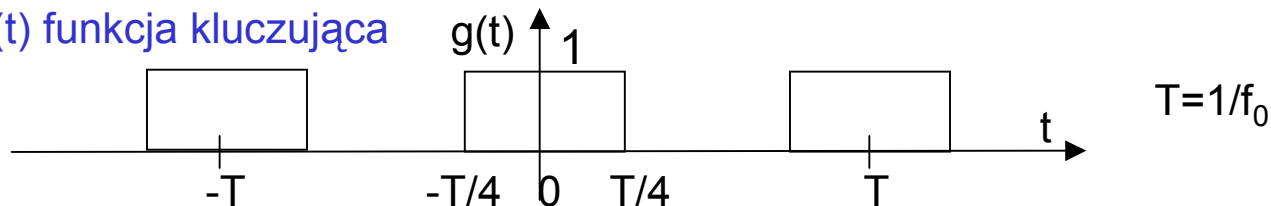


$$u_1(t) = A_0 \cos \omega_0 t + kx(t),$$

$$u_2(t) \approx [A_0 \cos \omega_0 t + x(t)]g(t)$$

$$u_2(t) \approx \begin{cases} u_1(t), & \text{dla } c(t) > 0 \\ 0, & \text{dla } c(t) < 0 \end{cases}$$

$g(t)$ funkcja kluczująca

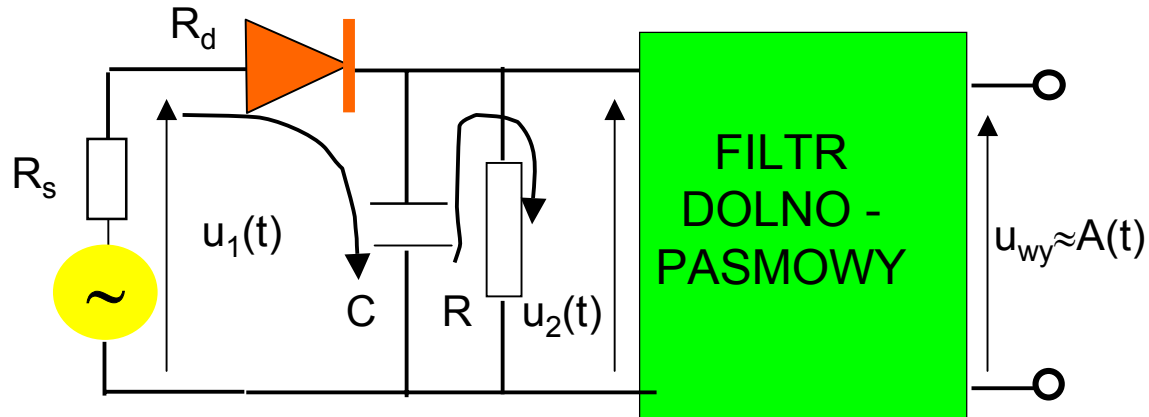


$$g(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \cos[\omega_0 t(2n-1)]$$

$$u_2(t) = \frac{A_0}{2} \left[1 + \frac{4}{\pi A_0} x(t) \right] \cos \omega_0 t + \dots$$

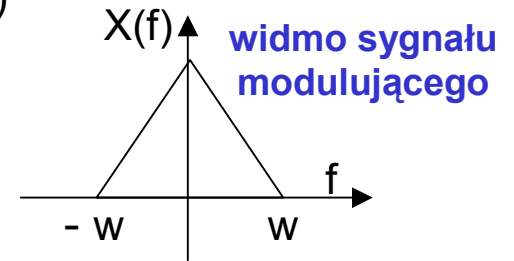
Detektory AM

detektor obwiedni



$$(R_d + R_s)C \ll 1/f_0$$

$$1/f_0 \ll RC \ll 1/w$$



$$s(t) = A_0 [1 + m x(t)] \cos(\omega_0 t) = A(t) \cos(\omega_0 t)$$

przykład:

$$s(t) = (1 + \sin 200\pi t) \cos(12\pi 10^4 t)$$

$$R_s = 75\Omega$$

$$R_d = 27\Omega$$

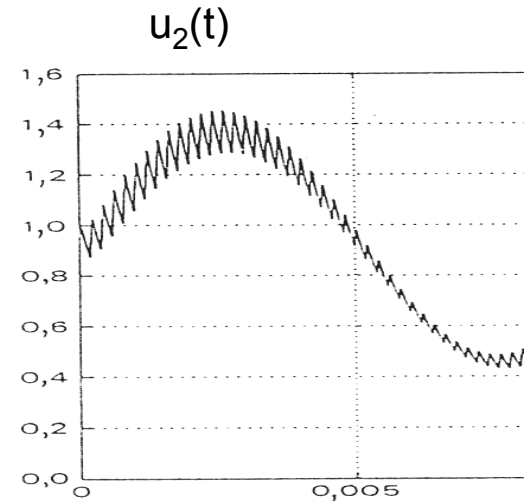
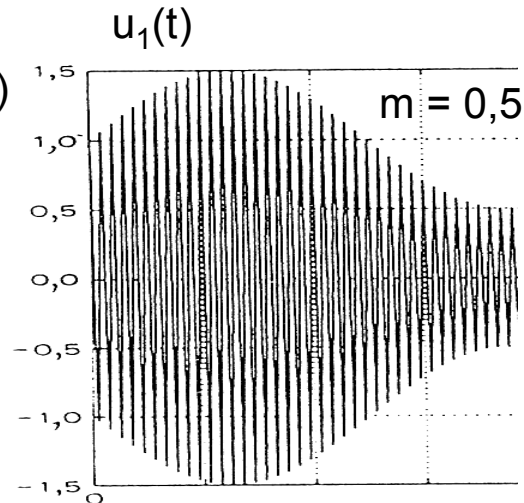
$$R = 10k\Omega$$

$$C = 0,01\mu F$$

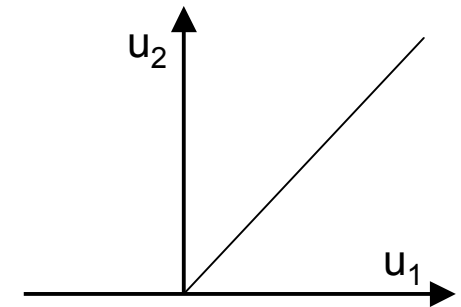
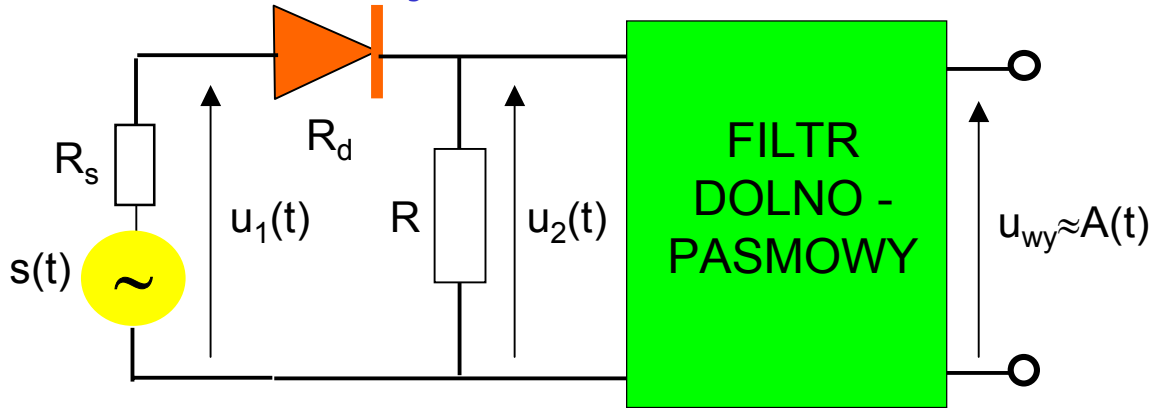
$$w = 100\text{Hz}, 1/w = 0,01\text{s}$$

$$f_0 = 60\text{kHz}, 1/f_0 = 1,67 \cdot 10^{-5}\text{s}$$

$$RC = 10^{-4}, (R_d + R_s)C = 10^{-6}$$



detektor liniowy



$$\begin{aligned} u_2 &= a u_1 & \text{dla } u_1 > 0 \\ u_2 &= 0 & \text{dla } u_1 < 0 \end{aligned}$$

$$s(t) = A_0(1 + m x(t)) \cos \omega_0 t$$

$$u_2(t) = a A_0(1 + m x(t)) \cos \omega_0 t, \quad \text{gdy } \cos \omega_0 t > 0$$

$$u_2(t) = 0, \quad \text{gdy } \cos \omega_0 t < 0$$

zakładając, że sygnał modulujący jest wolnozmienny w odniesieniu do jednego okresu przebiegu nośnego, można przyjąć w przybliżeniu, że wartość $x(t)$ jest stała w ciągu tego okresu. Wówczas sygnał $u(t)$ można rozwinąć w szereg Fouriera:

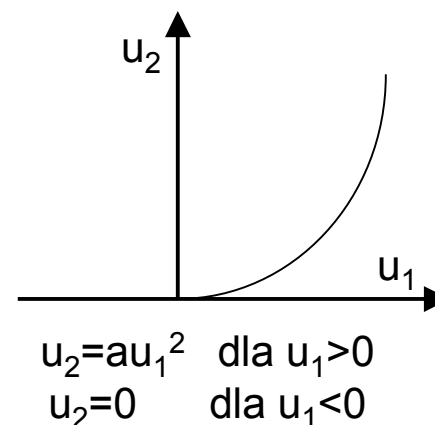
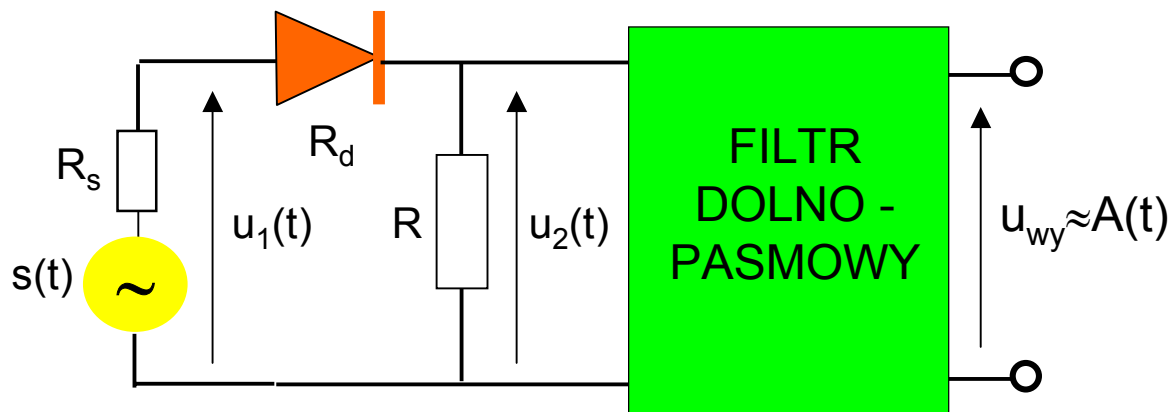
$$u_2(t) \approx a A_0(1 + m x(t)) \left[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \omega_0 t + \frac{2}{3\pi} \cos 2\omega_0 t + \frac{2}{15\pi} \cos 4\omega_0 t + \dots \right]$$

po filtracji dolnopasmowej

$$u_{wy} \approx \frac{a A_0}{\pi} (1 + m x(t))$$

Detektor liniowy może zapewnić otrzymanie nieznieskształconego przebiegu modulującego

detektor kwadratowy



$$s(t) = A_0(1 + m x(t)) \cos \omega_0 t$$

$$u_2(t) = a A_0^2 (1 + m x(t))^2 \cos^2 \omega_0 t, \quad \text{gdy } \cos \omega_0 t > 0$$

$$u_2(t) = 0, \quad \text{gdy } \cos \omega_0 t < 0$$

stosujemy rozwinięcie $u_2(t)$ w szereg Fouriera przy założeniu wolnozmiennnej amplitudy:

$$u_2(t) \approx a A_0^2 (1 + m x(t))^2 \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi} \cos \omega_0 t + \dots \right]$$

na wyjściu filtru dolnopasmowego:

$$u_{wy} \approx \frac{a A_0^2}{2} [1 + m x(t)]^2 = \frac{a A_0^2}{2} [1 + 2m x(t) + m^2 x^2(t)]$$

zniekształcony sygnał
modulujący

detektor kwadratowy wprowadza zniekształcenia sygnału modulującego, które zależą od głębokości modulacji

DWUWSTĘGOWA MODULACJA AMPLITUDY BEZ FALI NOŚNEJ

AM DSB SC

- funkcja modulująca: $m(t) = k x(t)$, k - stała modulatora [V/V]
- przebieg nośny analityczny:

$$z_c(t) = A_0 \exp(j\omega_0 t)$$

- sygnał zmodulowany analityczny

$$z_s(t) = A_0 k x(t) \exp(j\omega_0 t)$$

- sygnał zmodulowany rzeczywisty

$$s(t) = A_0 k x(t) \cos(\omega_0 t)$$

- amplituda chwilowa (obwiednia)

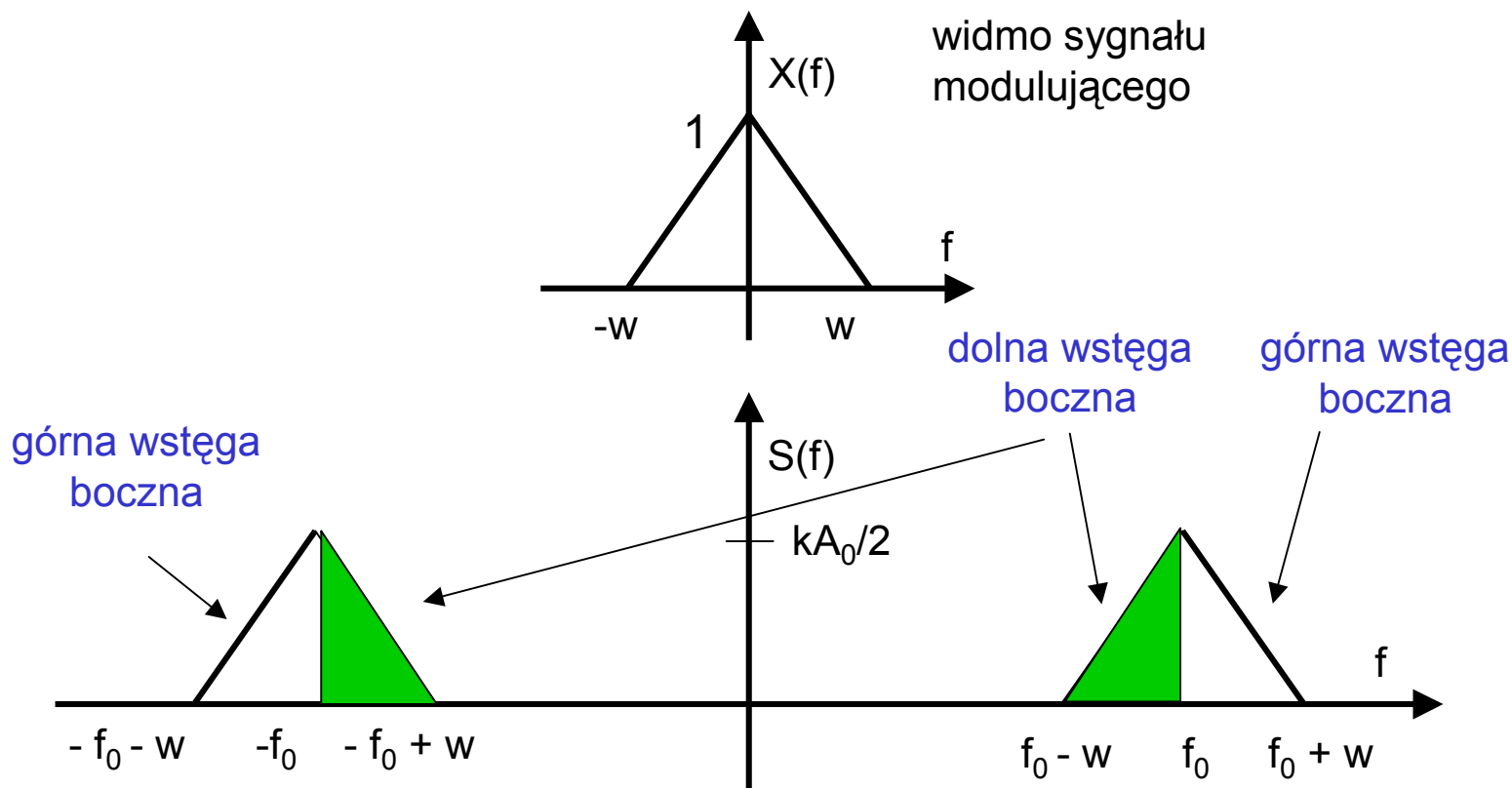
$$A(t) = A_0 |m(t)| = A_0 |k x(t)|$$

- widmo sygnału zmodulowanego

$$S(f) = k (A_0/2) [X(f + f_0) + X(f - f_0)]$$

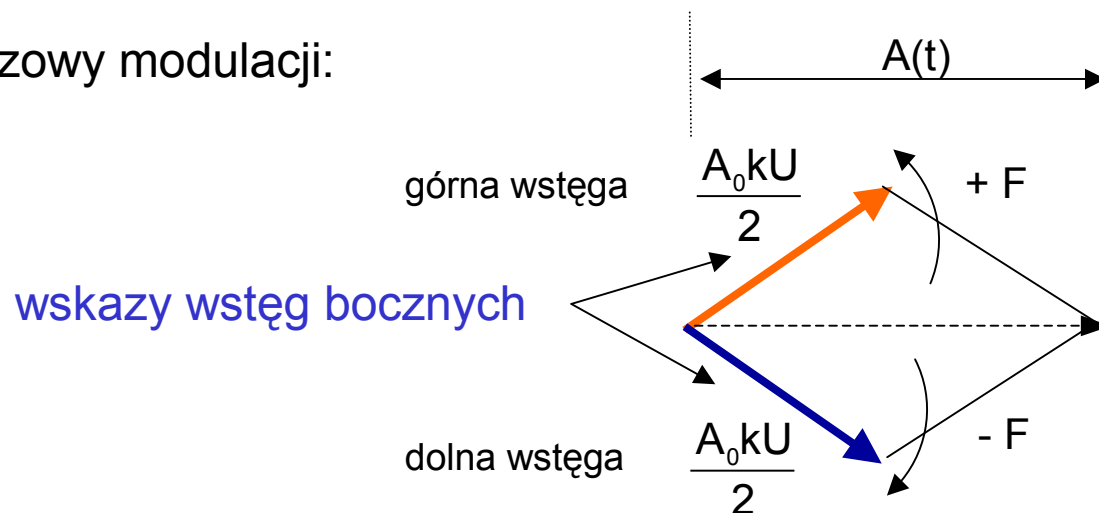
widmo sygnału zmodulowanego

$$s(t) = A_0 k x(t) \cos(\omega_0 t) \leftrightarrow S(f) = k (A_0/2) [X(f + f_0) + X(f - f_0)]$$



Modulacja sygnałem kosinusoidalnie zmiennym

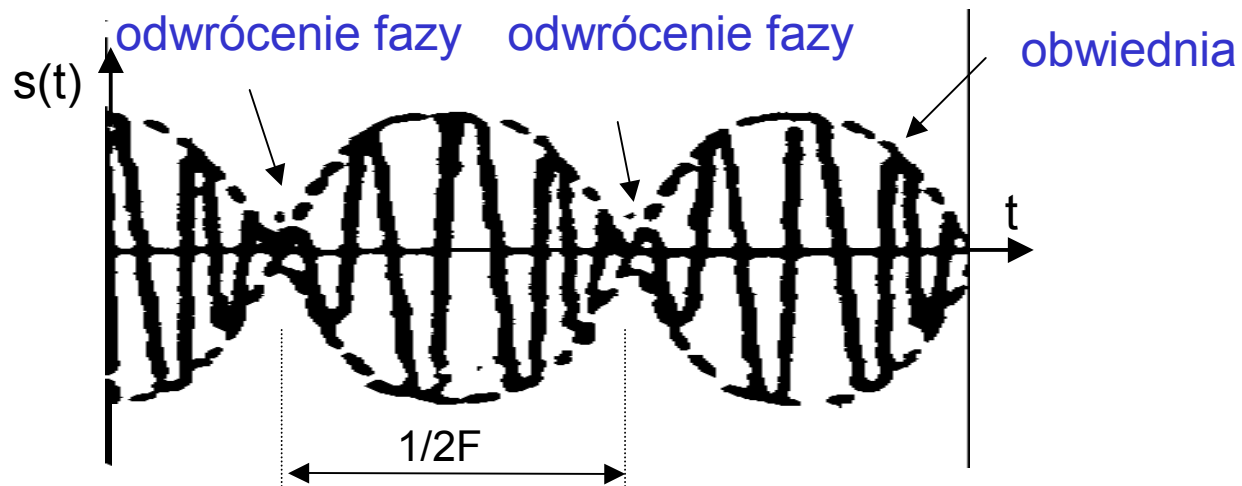
- sygnał modulujący: $x(t) = U \cos \Omega t$
- funkcja modulująca: $m(t) = k x(t) = k U \cos \Omega t$
- sygnał nośny analityczny: $z_c(t) = A_0 \exp(j\omega_0 t)$
- sygnał zmodulowany analityczny: $z_s(t) = A_0 k U \cos(\Omega t) e^{j\omega_0 t}$
$$z_s(t) = \frac{A_0 k U}{2} e^{j(\omega_0 + \Omega)t} + \frac{A_0 k U}{2} e^{j(\omega_0 - \Omega)t}$$
- amplituda chwilowa $A(t) = |A_0 k U \cos \Omega t|$
- wykres wskazowy modulacji:



Modulacja sygnałem kosinusoidalnie zmiennym

- sygnał modulujący: $x(t) = U \cos \Omega t$, $\Omega = 2\pi F t$
- przebieg nośny: $c(t) = A_0 \cos \omega_0 t$
- sygnał zmodulowany rzeczywisty:

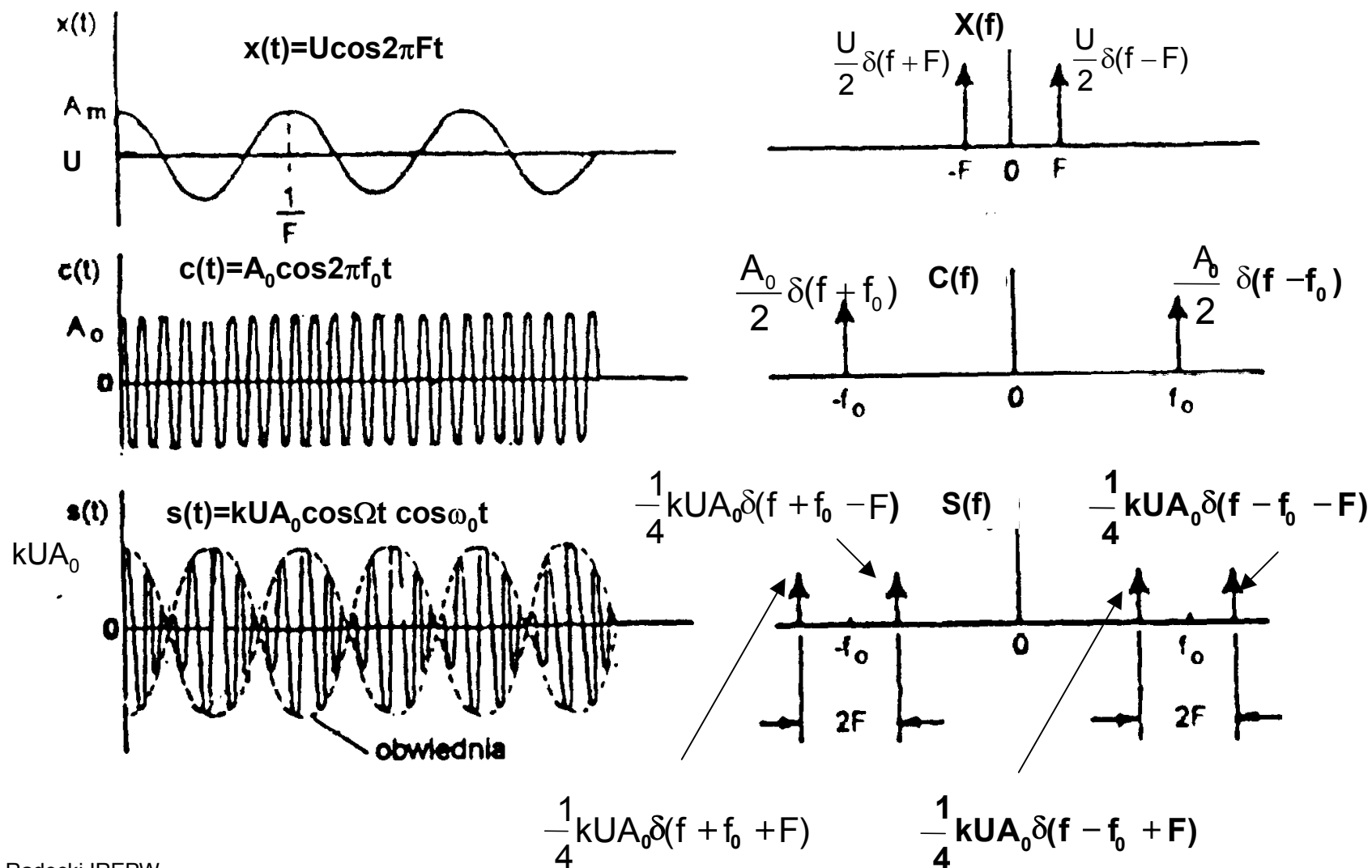
$$s(t) = kUA_0 \cos \Omega t \cos \omega_0 t$$



- widmo Fouriera sygnału zmodulowanego

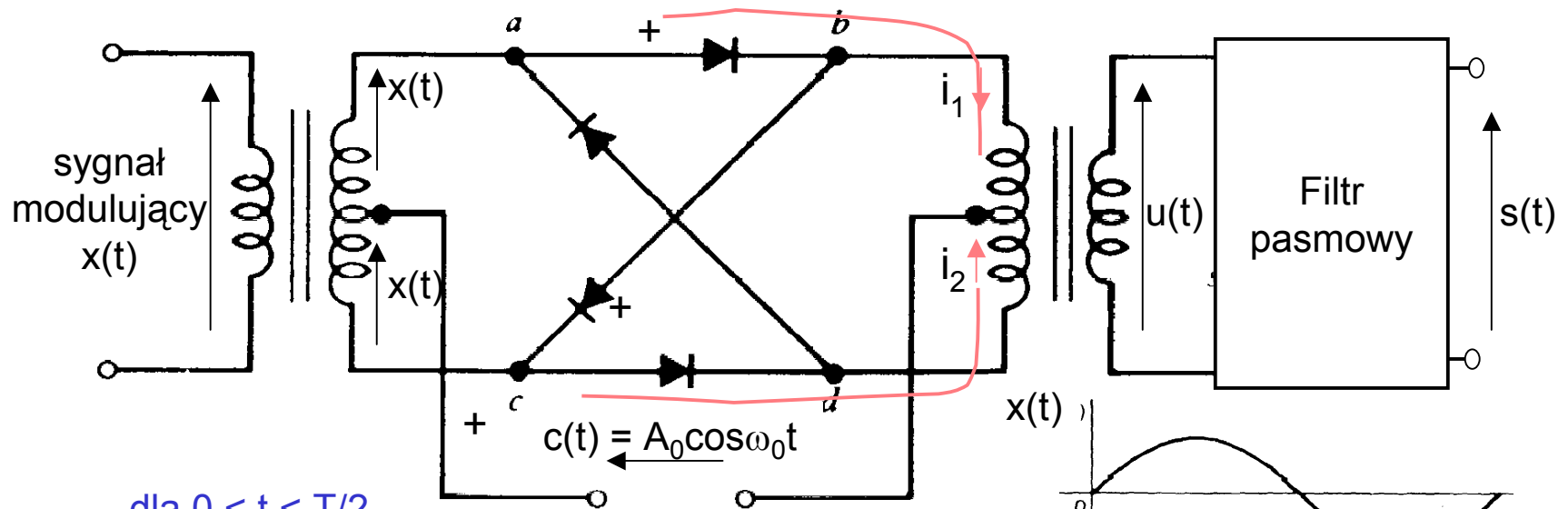
$$S(f) = kUA_0/4 [\delta(f - f_0 - F) + \delta(f + f_0 + F)] + kUA_0/4 [\delta(f - f_0 + F) + \delta(f + f_0 - F)]$$

Modulacja sygnałem kosoidalnie zmiennym



Modulatory AM DSB SC

Modulator kołowy



dla $0 < t < T/2$

$$i_1(t) = k_1(A_0 \cos \omega_0 t + x(t))g(t)$$

$$i_2(t) = k_1(A_0 \cos \omega_0 t - x(t))g(t)$$

$$u(t) = c(i_1 - i_2) \approx kx(t)g(t), \quad s(t) = k_2 x(t) \cos \omega_0 t$$

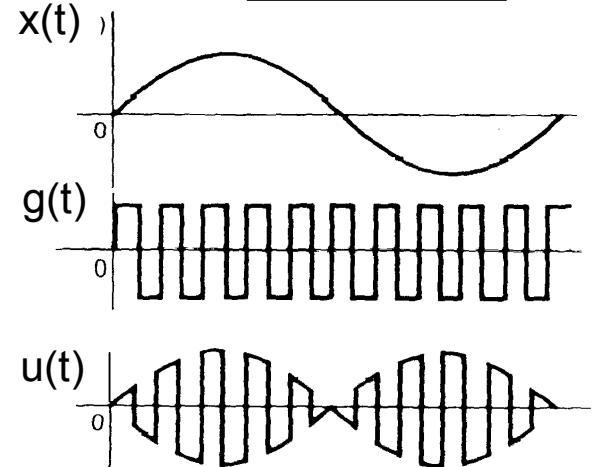
dla $T/2 < t < T$

$$i_1(t) = k_1(-A_0 \cos \omega_0 t + x(t))g(t)$$

$$i_2(t) = k_1(-A_0 \cos \omega_0 t - x(t))g(t)$$

$$u(t) = c(i_1 - i_2) \approx -kx(t)g(t), \quad s(t) = -k_2 x(t) \cos \omega_0 t$$

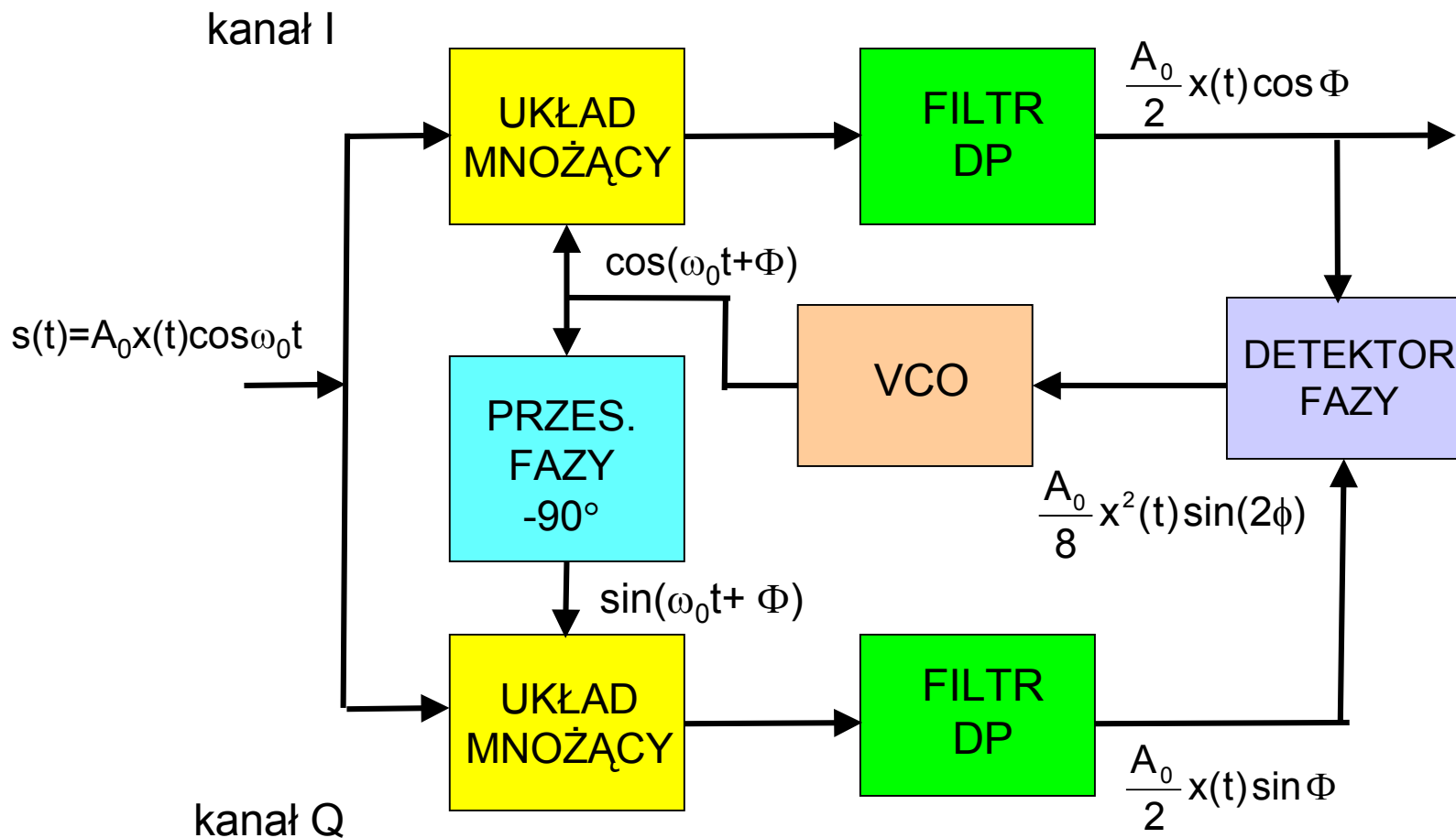
K.Radecki IREPW



funkcja kluczująca

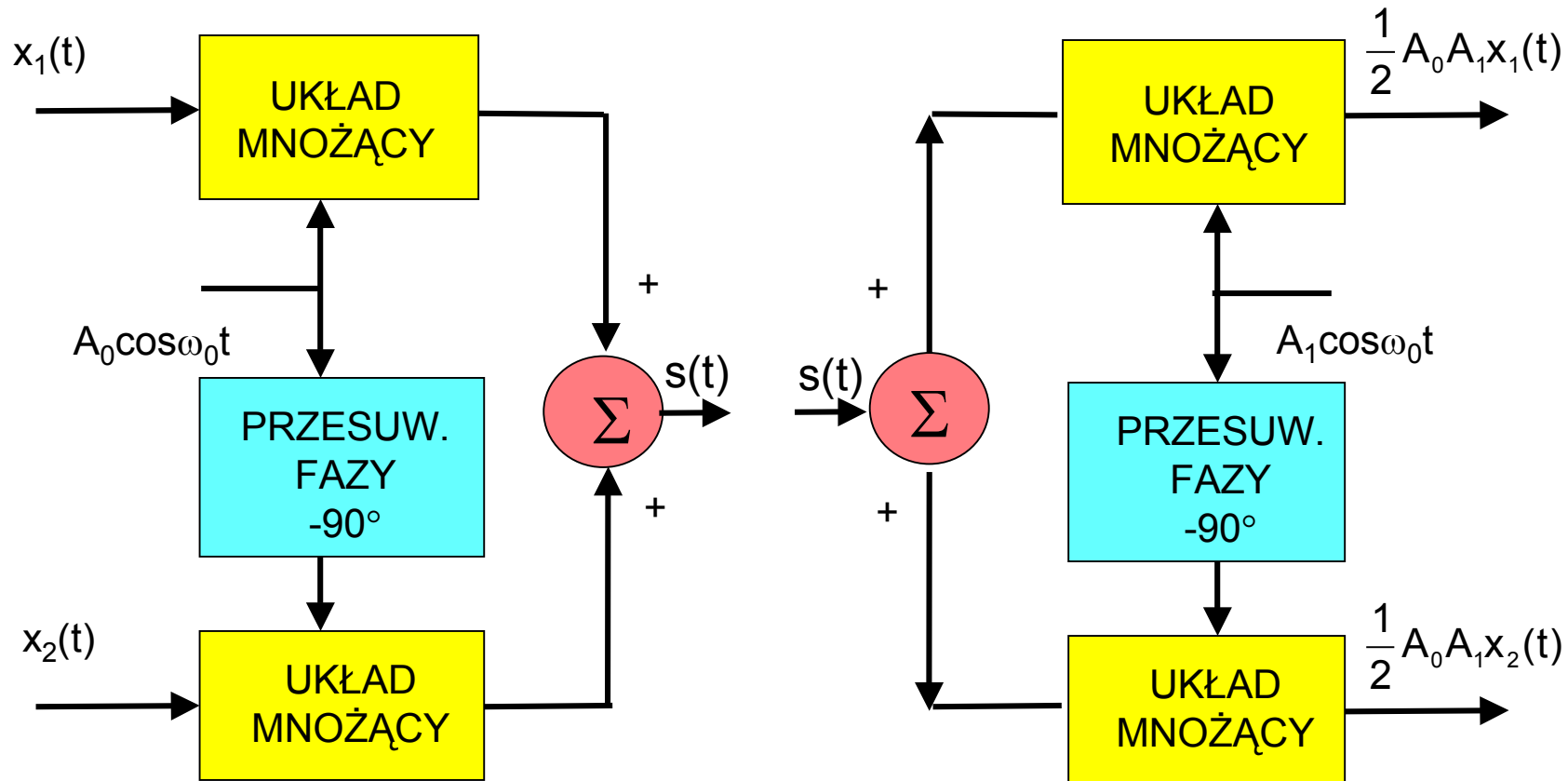
$$g(t) = \frac{4}{\pi} \left(\cos \omega_0 t - \frac{1}{3} \cos 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \cos 5\omega_0 t - \dots \right)$$

Odbiornik Costasa

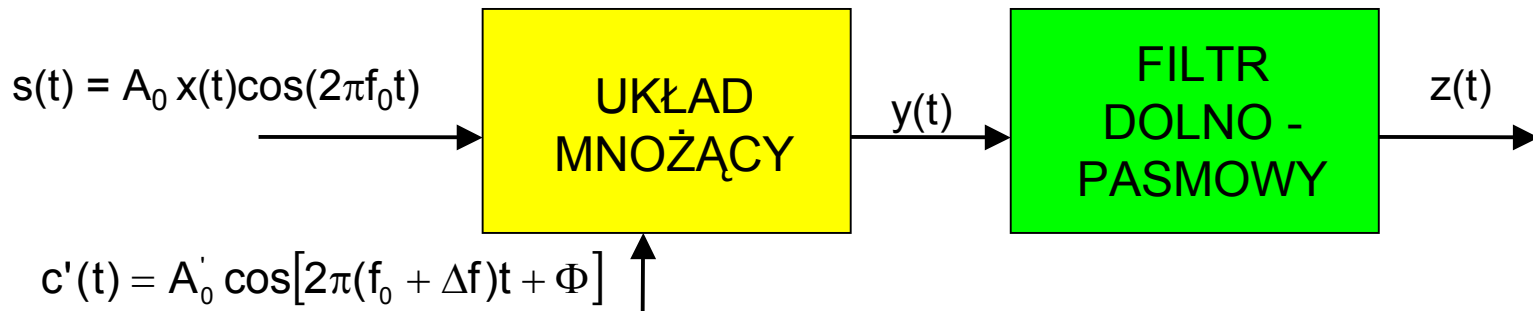


Modulator I demodulator kwadraturowy I/Q

$$s(t) = A_0 x_1(t) \cos \omega_0 t + A_0 x_2(t) \sin \omega_0 t$$



Detektor synchroniczny



Wpływ przesunięcia fazy, $\Delta f=0$

$$c'(t) = A'_0 \cos(\omega_0 t + \Phi)$$

$$y(t) = c'(t)s(t) = \frac{1}{2} A_0 A'_0 x(t) \cos(2\omega_0 t + \Phi) + \frac{1}{2} A_0 A'_0 x(t) \cos(\Phi)$$

$$z(t) = \frac{1}{2} A_0 A'_0 x(t) \cos(\Phi)$$

przy detekcji synchronicznej jest wymagane sfazowanie lokalnego przebiegu z przebiegiem odbieranym. Wartość Φ powinna być równa zero.

Wpływ przesunięcia częstotliwości, $\Phi=0$

$$c'(t) = A'_0 \cos(2\pi(f_0 + \Delta f)t)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} A_0 A'_0 x(t) \cos(2\omega_0 + \Delta\omega t) + \frac{1}{2} A_0 A'_0 x(t) \cos(\Delta\omega t)$$

$$z(t) = \frac{1}{2} A_0 A'_0 x(t) \cos(\Delta\omega t)$$

JEDNOWSTĘGOWA MODULACJA AMPLITUDY BEZ FALI NOŚNEJ

AM SSB-SC

- funkcja modulująca: $m(t) = x(t) \pm j \hat{x}(t)$, $\hat{x}(t)$ transformata Hilberta sygnału $x(t)$

+ modulacja z górną wstęgą boczną - modulacja z dolną wstęgą boczną

$$x(t) = \hat{x}(t) * \left(\frac{-1}{\pi t} \right) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{x}(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad \hat{x}(t) = x(t) * \left(\frac{1}{\pi t} \right) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau$$

- przebieg nośny analityczny

$$z_c(t) = A_0 \exp(j\omega_0 t)$$

- sygnał zmodulowany analityczny (górna wstęga)

$$z_s(t) = A_0 [x(t) + j \hat{x}(t)] \exp(j\omega_0 t)$$

- sygnał zmodulowany rzeczywisty

$$s(t) = A_0 [x(t)\cos(\omega_0 t) - \hat{x}(t)\sin(\omega_0 t)]$$

- widmo sygnału zmodulowanego

$$S(f) = A_0 [X(f - f_0)1(f - f_0) + X(f + f_0)1(-f - f_0)]$$

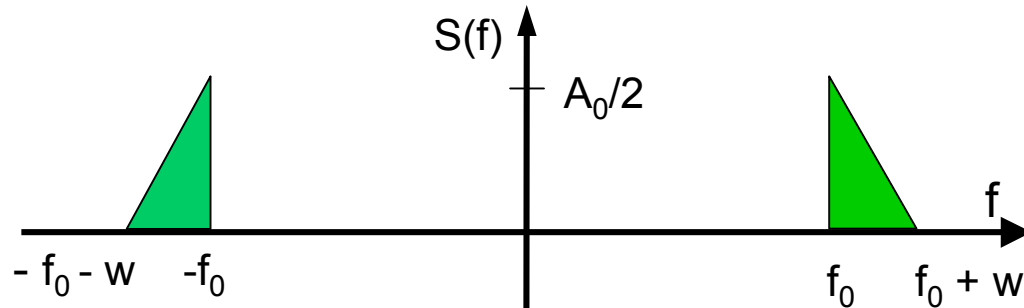
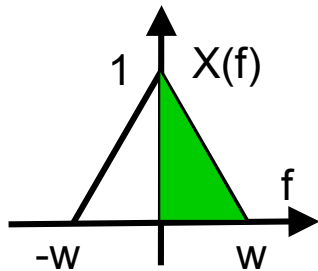
$$A_0 [x(t)\cos(\omega_0 t) - x(t)\sin(\omega_0 t)] \leftrightarrow A_0 [X(f - f_0)\mathbf{1}(f - f_0) + X(f + f_0)\mathbf{1}(-f - f_0)]$$

wyprowadzenie

$$\hat{x}(t) \leftrightarrow -j\operatorname{sgn}[f X(f)], \quad x(t)A_0 \cos \omega_0 t \leftrightarrow \frac{A_0}{2} [X(f - f_0) + X(f + f_0)]$$

$$-\hat{x}(t)A_0 \sin \omega_0 t \leftrightarrow \frac{A_0}{2} [X(f - f_0)\operatorname{sgn}(f - f_0) - X(f + f_0)\operatorname{sgn}(f + f_0)]$$

$$S(f) = \frac{A_0}{2} \left\{ X(f - f_0) \underbrace{[1 + \operatorname{sgn}(f - f_0)]}_{1(f - f_0)} + X(f + f_0) \underbrace{[1 - \operatorname{sgn}(f + f_0)]}_{1(-f - f_0)} \right\}$$

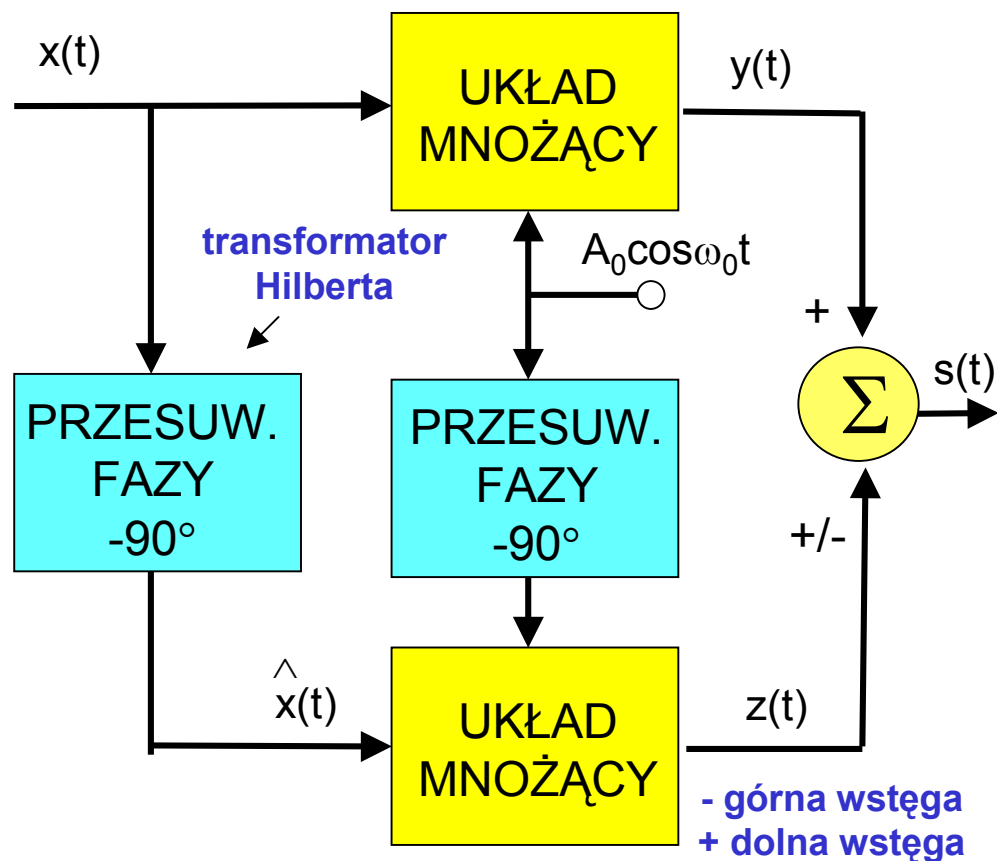


- amplituda chwilowa $A(t) = \sqrt{x^2(t) + \hat{x}^2(t)}$
- faza chwilowa $\Phi(t) = \omega_0 t + \arctan \frac{\hat{x}(t)}{x(t)} = \omega_0 t + \varphi(t)$
 - odchyłka fazy chwilowej
- częstotliwość chwilowa $F(t) = f_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = f_0 + f(t)$
 - odchyłka częstotliwości chwilowej

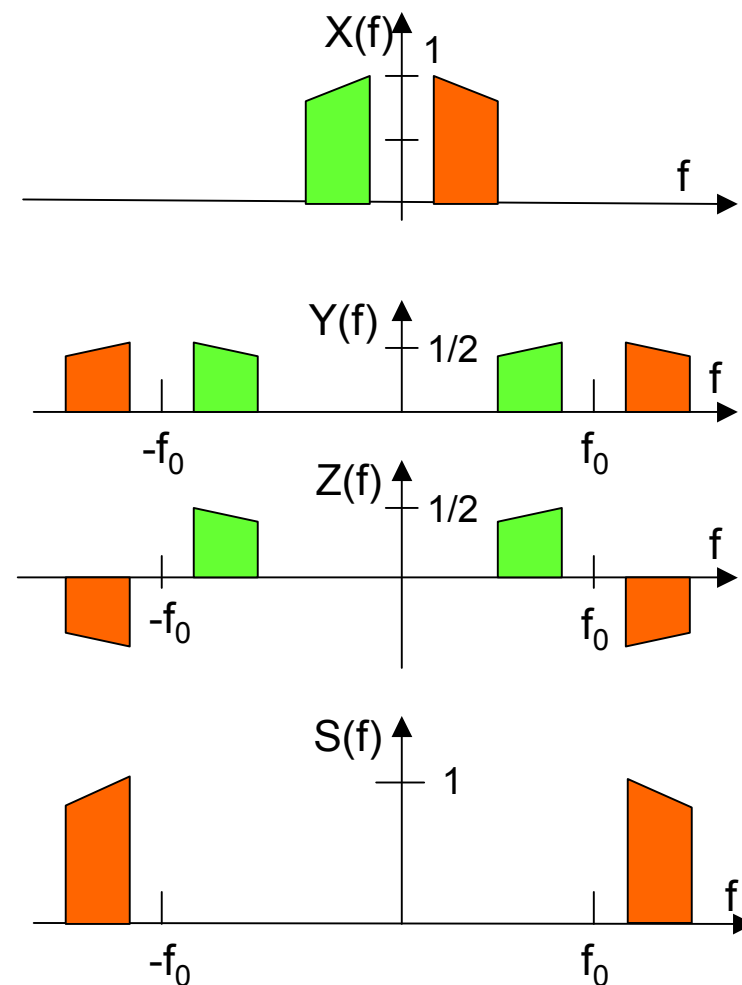
modulator kwadraturowy

górna wstęga: $s(t) = x(t)\cos_0 t - \hat{x}(t)\sin \sin_0 t$

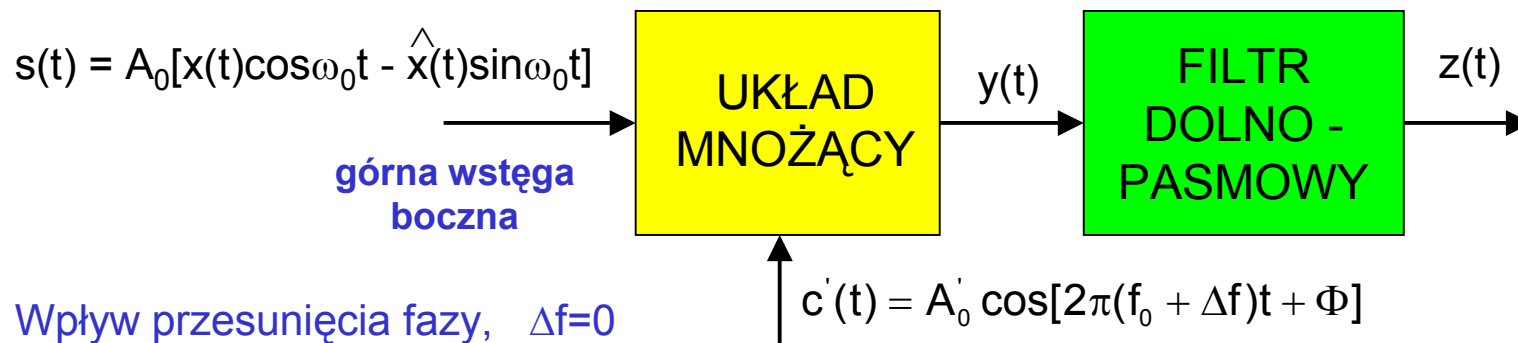
dolna wstęga: $s(t) = x(t)\cos_0 t + \hat{x}(t)\sin \sin_0 t$



widma sygnałów w modulatorze
modulacja SSB SC z górną wstęgą



detektor synchroniczny



$$y(t) = \frac{1}{2} A_0 A'_0 x(t) \cos(2\omega_0 t + \Phi) + \frac{1}{2} A_0 A'_0 \hat{x}(t) \cos(\Phi) +$$

$$- \frac{1}{2} A_0 A'_0 x(t) \sin(2\omega_0 t + \Phi) + \frac{1}{2} A_0 A'_0 \hat{x}(t) \sin(\Phi)$$

$$z(t) = \frac{1}{2} A_0 A'_0 [x(t) \cos(\Phi) + \hat{x}(t) \sin \Phi]$$

Wpływ przesunięcia częstotliwości, $\Delta \varphi=0$

$$y(t) = \frac{1}{2} A_0 A'_0 x(t) \cos(2\omega_0 t + \Delta\omega t) + \frac{1}{2} A_0 A'_0 \hat{x}(t) \cos(\Delta\omega t) +$$

$$- \frac{1}{2} A_0 A'_0 x(t) \sin(2\omega_0 t + \Delta\omega t) - \frac{1}{2} A_0 A'_0 \hat{x}(t) \sin(\Delta\omega t)$$

$$z(t) = \frac{1}{2} A_0 A'_0 x(t) \cos(\Delta\omega t) - \frac{1}{2} A_0 A'_0 \hat{x}(t) \sin(\Delta\omega t)$$

MODULACJA CZĘSTOTLIWOŚCI FM

sygnałem kosinusoidalnie zmiennym

- sygnał modulujący: $x(t) = U \cos \Omega t$, $\Omega = 2\pi F$
- funkcja modulująca: $m(t) = \exp[j2\pi k_f \int x(t) dt] = \exp(jm_f \sin \Omega t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_f) e^{jn\Omega t}$

k_f - nachylenie charakterystyki modulatora [Hz/V];

$$m_f = k_f \frac{U}{F} \quad \text{indeks modulacji}$$

- przebieg nośny analityczny: $z_c(t) = A_0 \exp j(\omega_0 t)$
- przebieg zmodulowany analityczny

$$z_s(t) = m(t) z_c(t) = A_0 \exp j(\omega_0 t + m_f \sin \Omega t)$$

- przebieg zmodulowany rzeczywisty:

$$s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + 2\pi k_f \int x(t) dt) = A_0 \cos(\omega_0 t + m_f \sin \Omega t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_f) \cos(\omega_0 + n\Omega)t$$

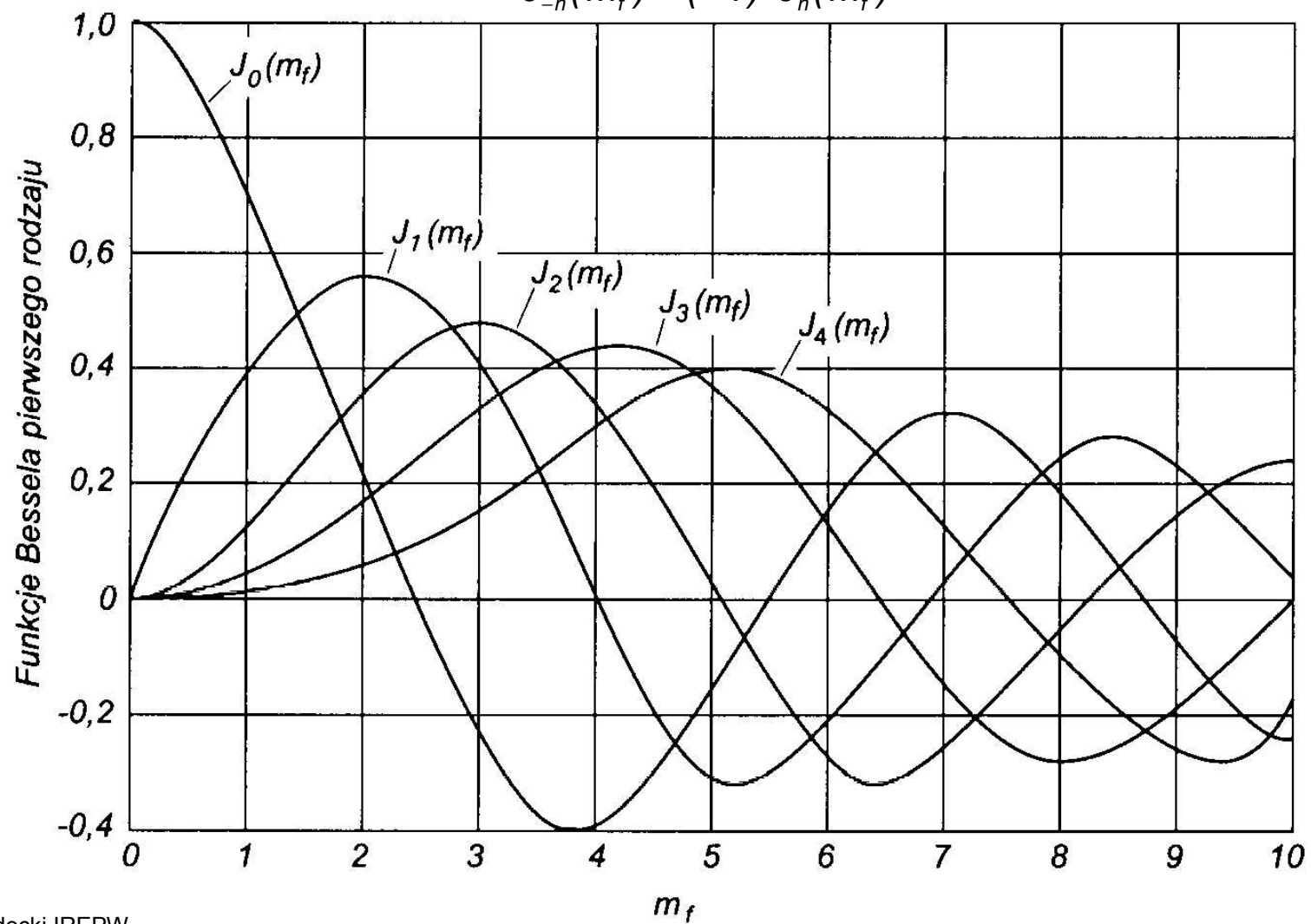
- widmo sygnału zmodulowanego:

$$S(f) = \frac{A_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_f) [\delta(f - f_0 + nF) + \delta(f + f_0 + nF)]$$

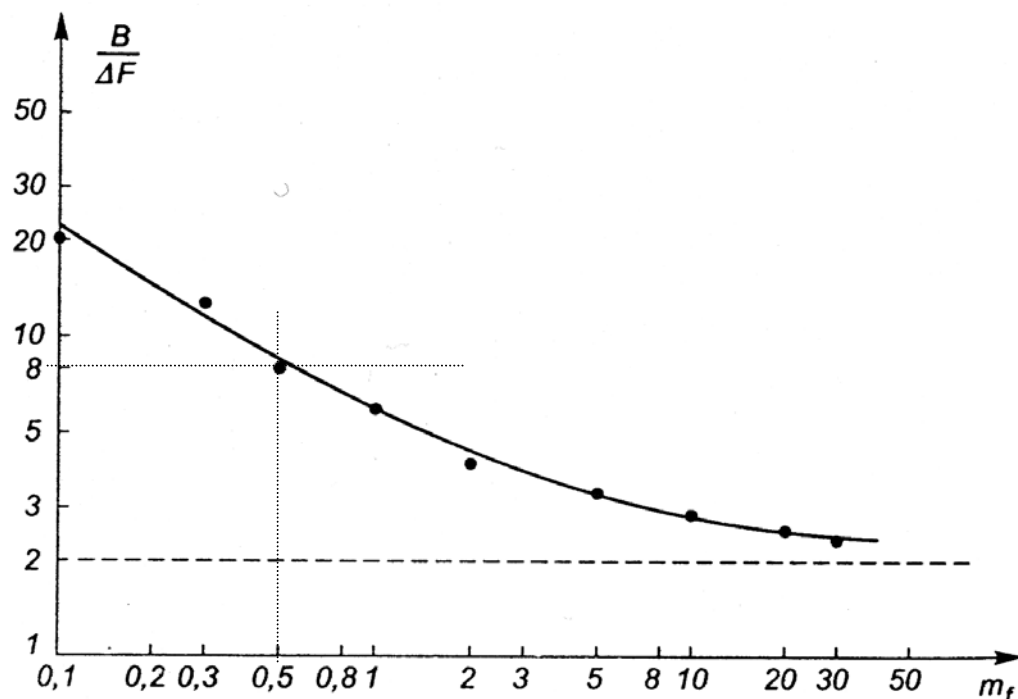
$J_n(m_f)$ - wartość funkcji Bessela pierwszego rodzaju i n-tego rzędu w punkcie m_f

Wykresy funkcji Bessela pierwszego rodzaju w zależności od indeksu modulacji

$$J_{-n}(m_f) = (-1)^n J_n(m_f)$$



- sygnał modulujący: $x(t) = U \cos \Omega t$, $\Omega = 2\pi F$
- częstotliwość chwilowa: $F(t) = f_0 + k_f x(t) = f_0 + \Delta F \cos \Omega t$ ← odchyłka częstotliwości chwilowej
- faza chwilowa: $\Phi(t) = \omega_0 t + m_f \sin \Omega t$
- dewiacja częstotliwości: $\Delta F = m_f F = k_f U$
- szerokość pasma: wzór przybliżony Carsona: $B \approx 2(\Delta F + F) = 2F(m_f + 1)$



$B = 2 n_{\max} F$
 - największa liczba całkowita,
 dla której $|J_n(m_f)| \leq 0,01$

przykład

dla $m_f = 0,5$
 $B = 8 \Delta F = 4 F$

Widmo sygnału FM

sygnał modulujący

$$x(t) = U \cos \Omega t$$

sygnał zmodulowany

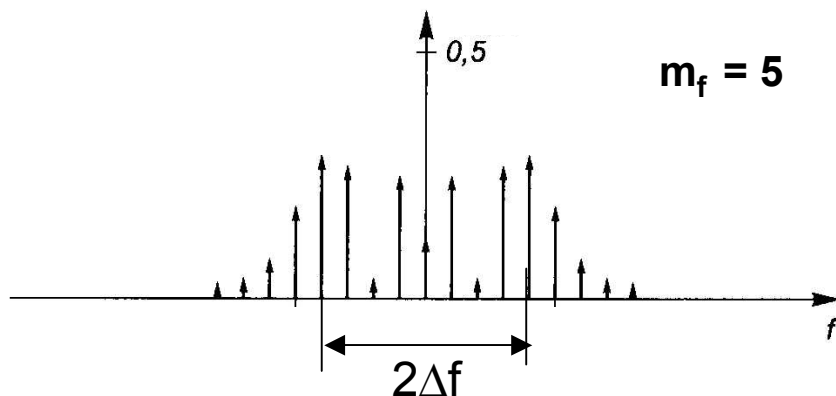
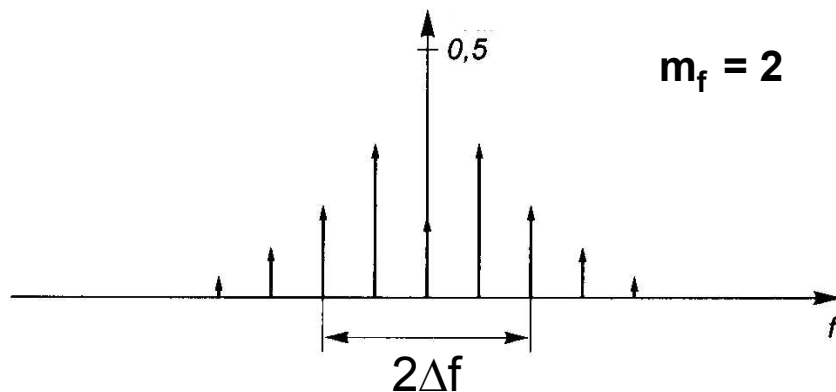
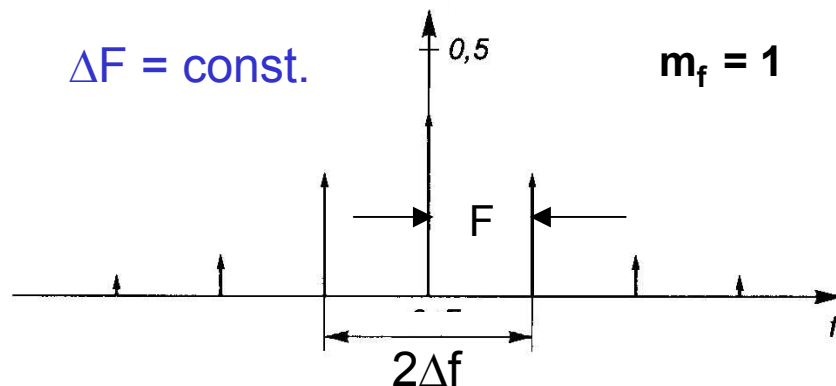
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_f) \cos(\omega_0 + n\Omega)t$$

szerokość pasma

$$B = 2(\Delta F + F) = 2(m_f + 1)$$

$$m_f = \frac{\Delta F}{F} = \frac{k_f U}{F}$$

$\Delta F = \text{const.}$



Widmo sygnału FM

sygnał modulujący

$$x(t) = U \cos \Omega t$$

sygnał zmodulowany

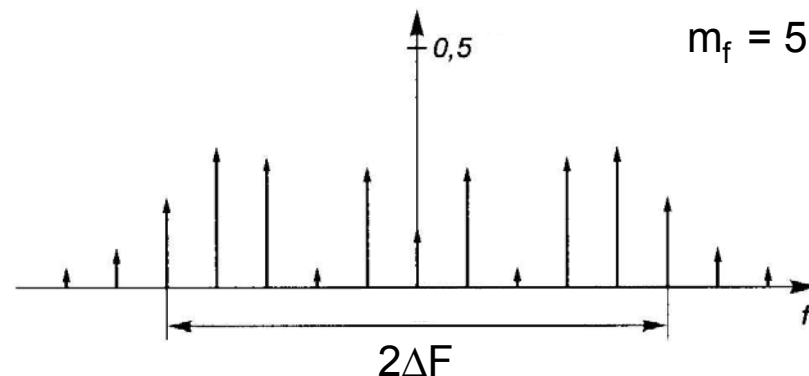
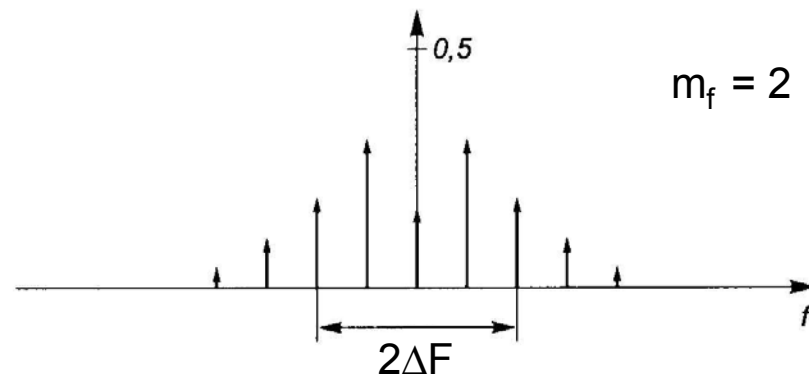
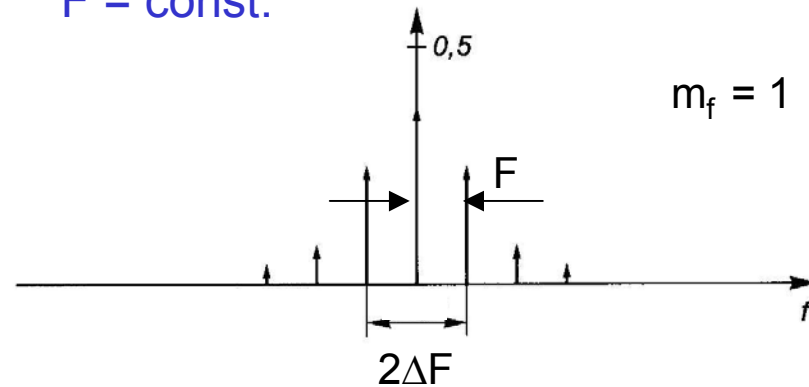
$$s(t) = A_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_f) \cos(\omega_0 + n\Omega)t$$

szerokość pasma

$$B = 2(\Delta F + F) = 2(m_f + 1)$$

$$m_f = \frac{\Delta F}{F} = \frac{k_f U}{F}$$

$F = \text{const.}$



WĄSKOPASMOWA MODULACJA FM ($m_f \ll 1$) sygnałem sinusoidalnie zmiennym

- sygnał modulujący: $x(t) = U \cos \Omega t$
- sygnał FM: $s(t) = A_0 \cos \omega_0 t \cos[m_f \sin \Omega t] - A_0 \sin \omega_0 t \sin[m_f \sin \Omega t]$

jeżeli $m_f \ll 1$ to $\cos(m_f \sin \Omega t) \approx 1$ oraz $\sin(m_f \sin \Omega t) \approx m_f \sin \Omega t$

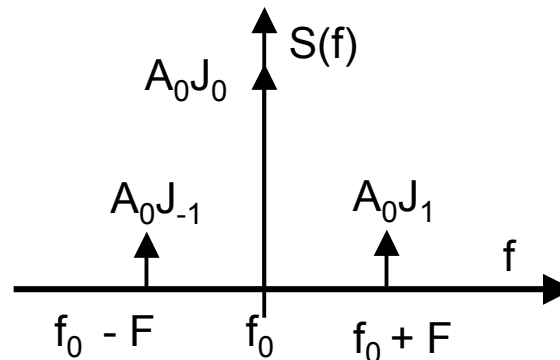
$$\begin{aligned} s(t) &\approx A_0 \cos \omega_0 t - m_f A_0 \sin \omega_0 t \sin \Omega t = \\ &= A_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} m_f A_0 [\cos(\omega_0 + \Omega)t - \cos(\omega_0 - \Omega)t] \end{aligned}$$

$$s(t) \approx J_0(m_f) A_0 \cos \omega_0 t + J_1(m_f) A_0 [\cos(\omega_0 + \Omega)t - \cos(\omega_0 - \Omega)t]$$

$$J_0(m_f) \approx 1$$

$$J_1(m_f) \approx \frac{m_f}{2}$$

$$J_2(m_f) \approx \frac{m_f^2}{8}$$



dla $m_f = 0,5$

$$J_0(0,5) = 0,938$$

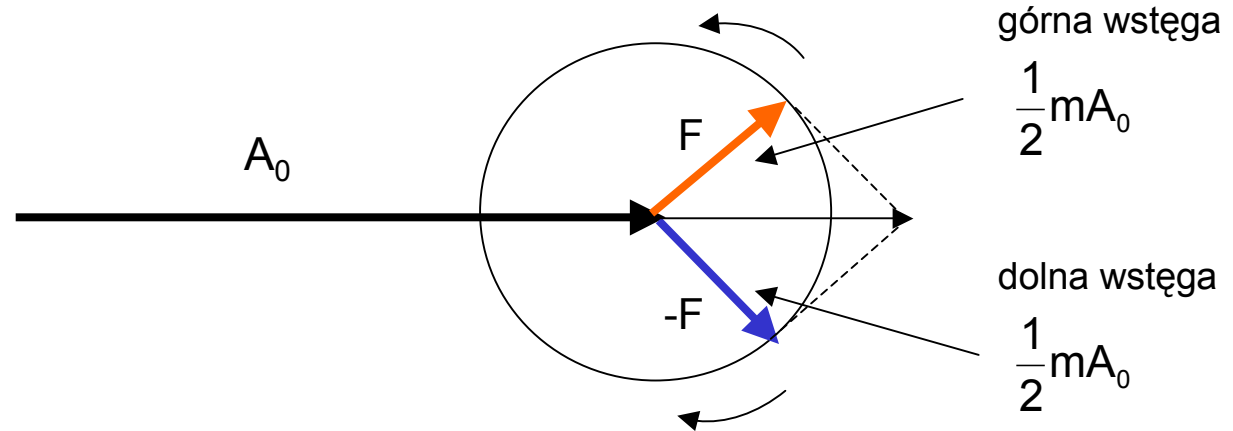
$$J_1(0,5) = 0,242$$

Wąskopasmowa modulacja FM lub PM posiada widmo praktycznie ograniczone do jednej pary wstęg bocznych

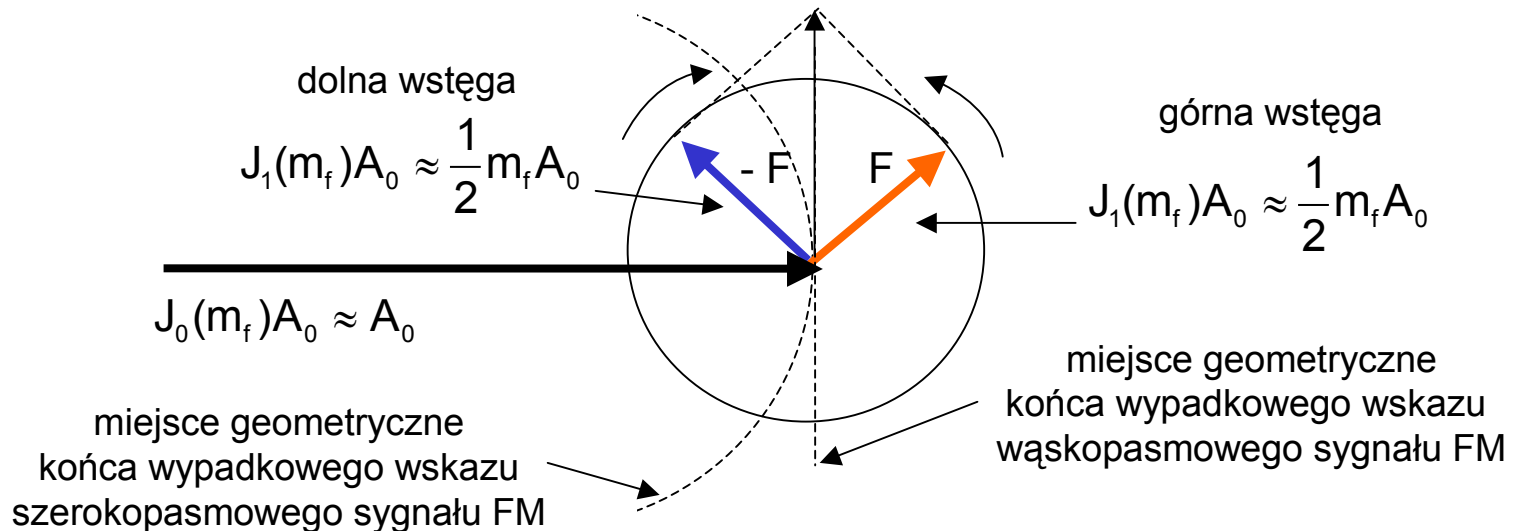
- sygnał AM: $s(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} m A_0 [\cos(\omega_0 + \Omega)t + \cos(\omega_0 - \Omega)t]$

Wykresy wskazowe

AM
$$s(t) = A_0 \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} m A_0 [\cos(\omega_0 + \Omega)t + \cos(\omega_0 - \Omega)t]$$



FM
$$s(t) \approx J_0(m_f) \cos \omega_0 t + J_1(m_f) [\cos(\omega_0 + \Omega)t - \cos(\omega_0 - \Omega)t]$$



MODULACJA FAZY PM

sygnałem sinusoidalnie zmiennym

- sygnał modulujący: $x(t) = U \sin \Omega t$, $\Omega = 2\pi F t$
- funkcja modulująca: $m(t) = \exp (m_{\varphi} \sin \Omega t)$,

k_{φ} - nachylenie charakterystyki modulatora [rad/V];

$$m_{\varphi} = k_{\varphi} U \quad - \text{indeks modulacji}$$

- przebieg nośny analityczny: $z_c(t) = A_0 \exp j(\omega_0 t)$
- przebieg zmodulowany analityczny: $z_s(t) = A_0 \exp j(\omega_0 t + m_{\varphi} \sin \Omega t)$
- przebieg zmodulowany rzeczywisty:

$$s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + k_{\varphi} x(t)) = A_0 \cos(\omega_0 t + m_{\varphi} \sin \Omega t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_{\varphi}) \cos(\omega_0 + n\Omega)t$$

- widmo sygnału zmodulowanego:

$$S(f) = \frac{A_0}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_{\varphi}) [\delta(f - f_0 + nF) + \delta(f + f_0 + nF)]$$

$J_n(m_f)$ - wartość funkcji Bessela pierwszego rodzaju i n-tego rzędu w punkcie m_f

- sygnał modulujący: $x(t) = U \sin \Omega t$, $\Omega = 2\pi F$
- faza chwilowa sygnału zmodulowanego: $\Phi(t) = \omega_0 t + \Delta\varphi \sin \Omega t$ ← **odchyłka fazy chwilowej**
- częstotliwość chwilowa sygnału zmod: $F(t) = f_0 + \Delta F \cos \Omega t$
- dewiacja częstotliwości: $\Delta F = m_\varphi F = k_\varphi U F$
- szerokość pasma: **wzór przybliżony Carsona:** $B \approx 2(\Delta F + F) = 2(m_\varphi + 1)F$
wzór dokładniejszy: $B \approx 2 n_{\max} F$, $n_{\max}$ - największa liczba całkowita, dla której $|J_n(m_f)| \leq 0,01$

Porównanie parametrów modulacji FM i PM

odchyłka fazy chwilowej

$$\varphi(t) = \begin{cases} k_\varphi x(t) & \text{PM} \\ 2\pi k_f \int x(t) dt & \text{FM} \end{cases}$$

szerokość pasma

$$B = \begin{cases} 2(m_\varphi + 1)F = 2(k_\varphi U + 1)F & \text{PM} \\ 2(m_f + 1)F = 2(k_f U + F) & \text{FM} \end{cases}$$

odchyłka częstotliwości chwilowej

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d\varphi(t)}{dt} = \begin{cases} \frac{k_\varphi}{2\pi} \frac{dx(t)}{dt} & \text{PM} \\ k_f x(t) & \text{FM} \end{cases}$$

indeks modulacji

$$\begin{aligned} m_\varphi &= \Delta\varphi = k_\varphi U & \text{PM} \\ m_f &= \frac{\Delta F}{F} = \frac{k_f U}{F} & \text{FM} \end{aligned}$$

Widmo sygnału PM

sygnał modulujący
 $x(t) = U \sin \Omega t$

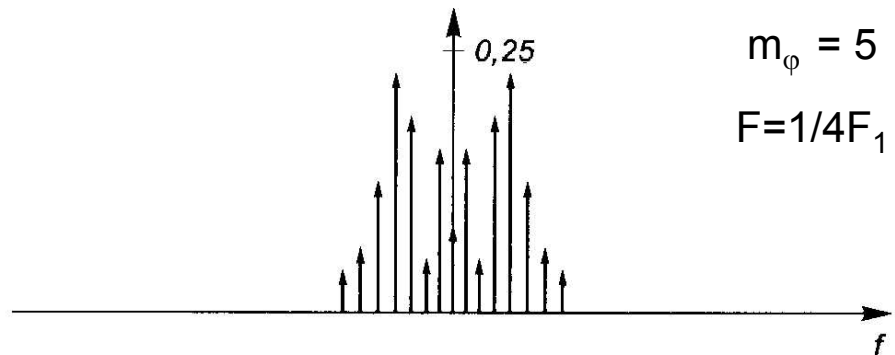
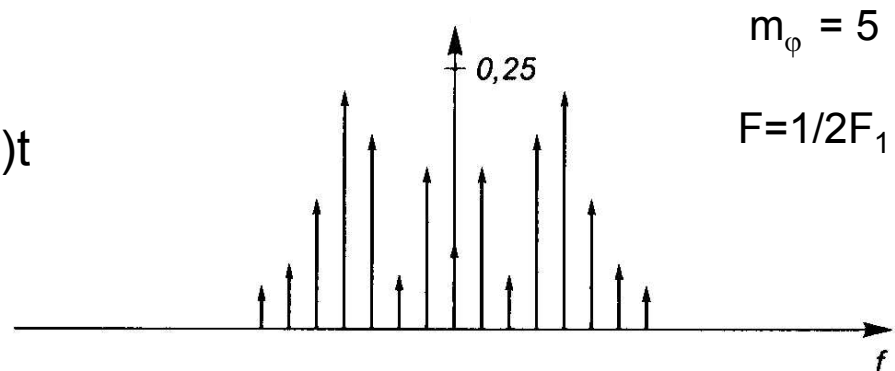
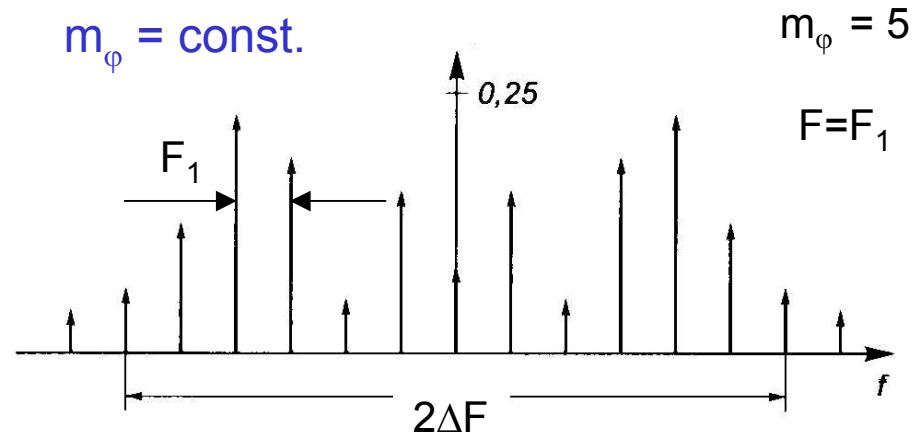
sygnał zmodulowany

$$s(t) = A_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(m_\varphi) \cos(\omega_0 + n\Omega)t$$

szerokość pasma

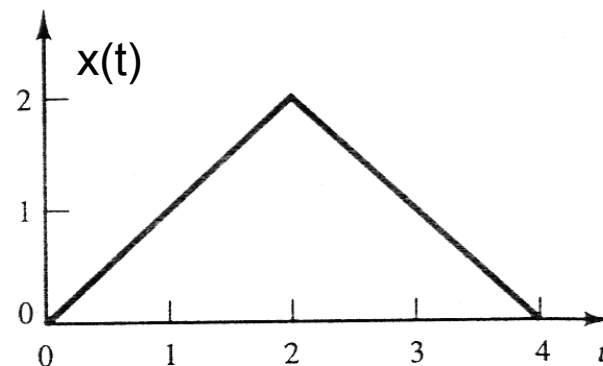
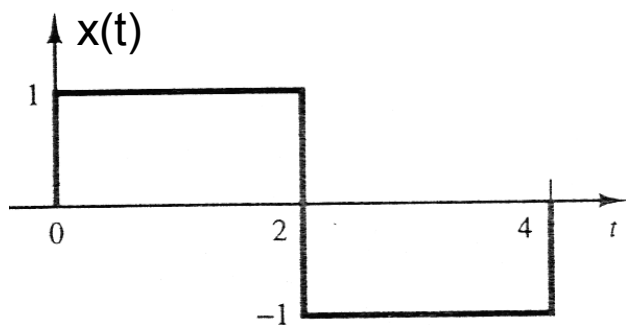
$$B = 2(\Delta F + F) = 2(m_\varphi + 1)$$

$m_\varphi = \text{const.}$

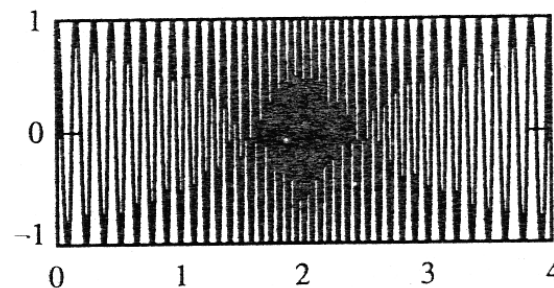
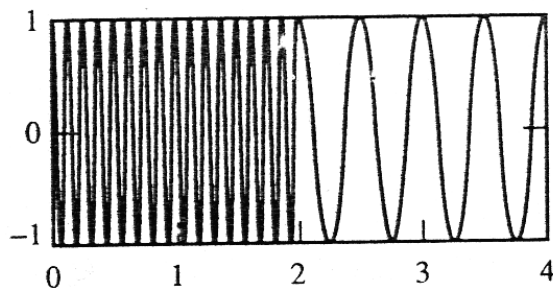


MODULACJA FM i PM

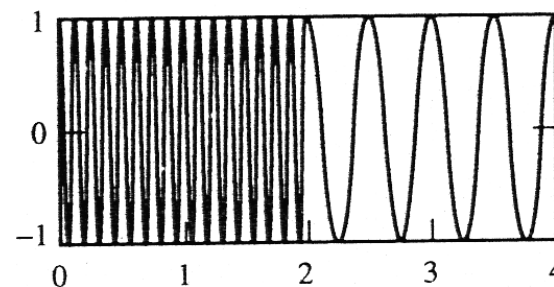
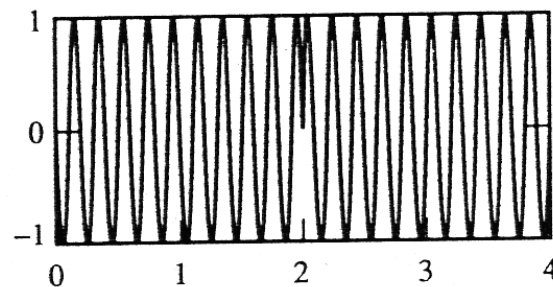
sygnałem prostokątnym i trójkątnym



FM

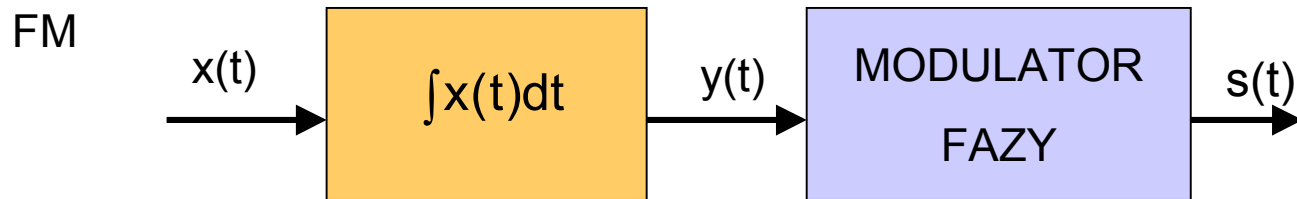


PM



MODULATORY FM i PM

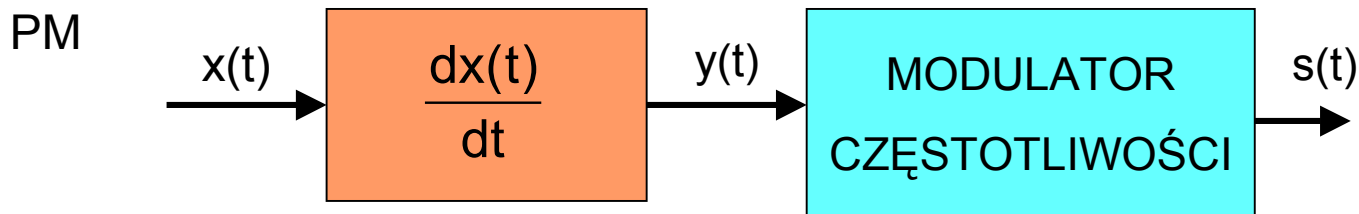
pośredni modulator FM



$$y(t) = \int x(t) dt$$

$$s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + k_\phi y(t)) = A_0 \cos(\omega_0 t + k_\phi \int x(t) dt) = A_0 \cos(\omega_0 t + 2\pi k_f \int x(t) dt)$$

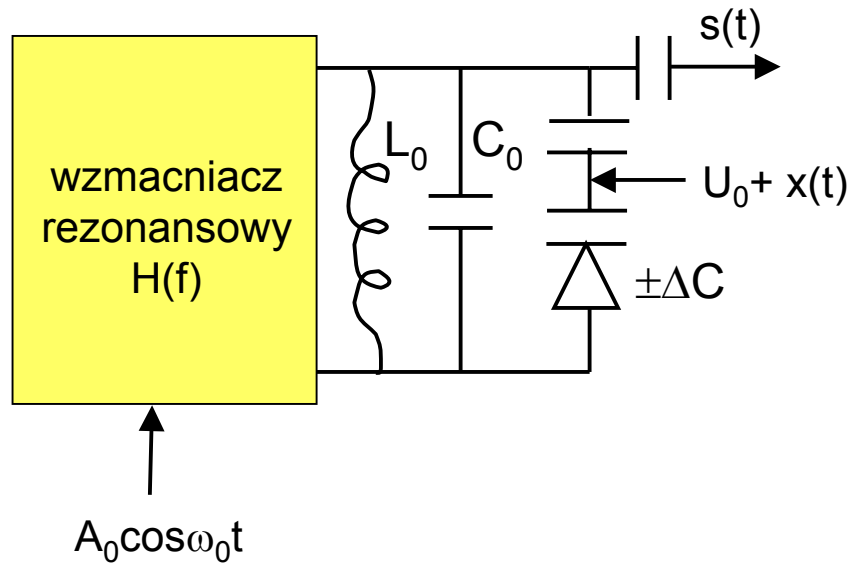
pośredni modulator PM



$$y(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + 2\pi k_f \int y(t) dt) = A_0 \cos(\omega_0 t + 2\pi k_f x(t)) = A_0 \cos(\omega_0 t + k_\phi x(t))$$

bezpośredni modulator PM



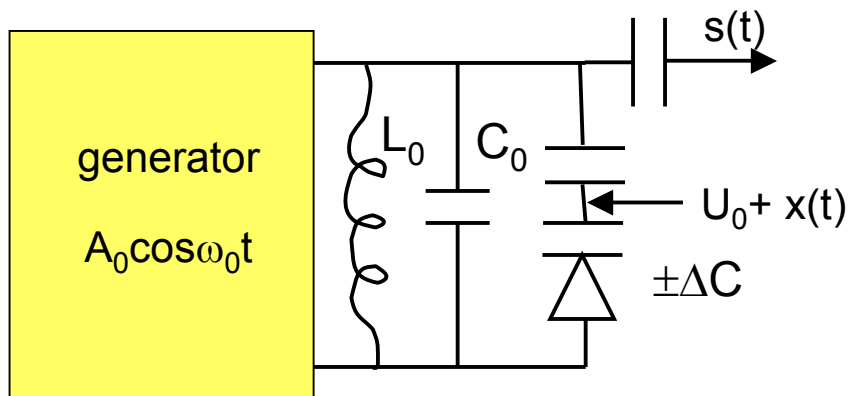
$$H(f) = \frac{H_0}{1 + j2Q \frac{f - f_0}{f_0}}, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 C_0}}$$

$$\varphi(f) = -\arctan\left(2Q \frac{f - f_0}{f_0}\right) \approx -2Q \frac{f - f_0}{f_0}$$

$$f(t) \approx f_0 - k_1 x(t)$$

$$\varphi(t) \approx 2Q \frac{f(t) - f_0}{f_0} = k_2 x(t)$$

bezpośredni modulator FM



$$C(t) = C_0 + k_0 x(t), \quad f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 C_0}}$$

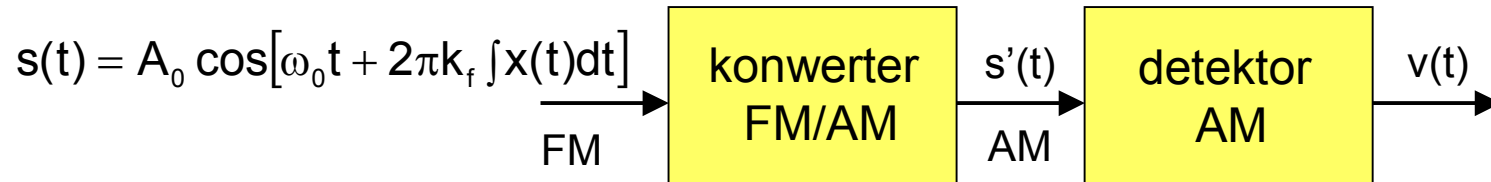
$$f(t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_0 (C_0 + k_0 x(t))}}, \quad \frac{k_0}{C_0} x(t) \ll 1$$

$$f(t) = \frac{f_0}{\sqrt{1 + \frac{k_0}{C_0} x(t)}} \approx f_0 \left(1 - \frac{k_0}{2C_0} x(t)\right)$$

DETEKTORY SYGNAŁU FM

Detektory z zamianą FM na AM

zasada działania



$$1) \quad |H(f)| = H_0 + k(f - f_0), \quad \text{dla } |f - f_c| < \frac{B}{2}$$

$$f(t) = f_0 + k_f x(t)$$

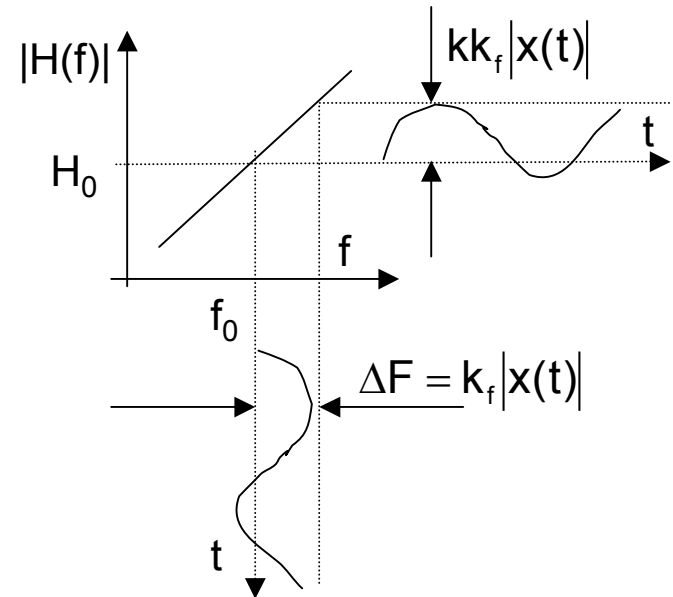
$$s'(t) = A_0 [H_0 + k k_f x(t)] \cos(\omega_0 t + 2\pi k_f \int x(t) dt)$$

$$v(t) = A_0 [H_0 + k k_f x(t)]$$

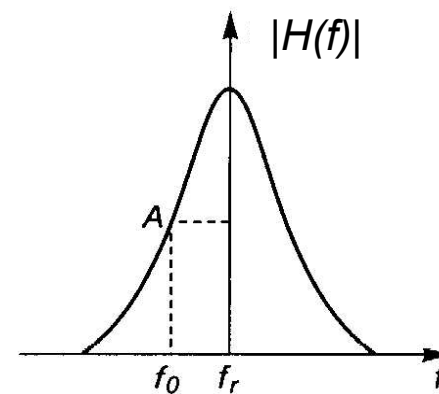
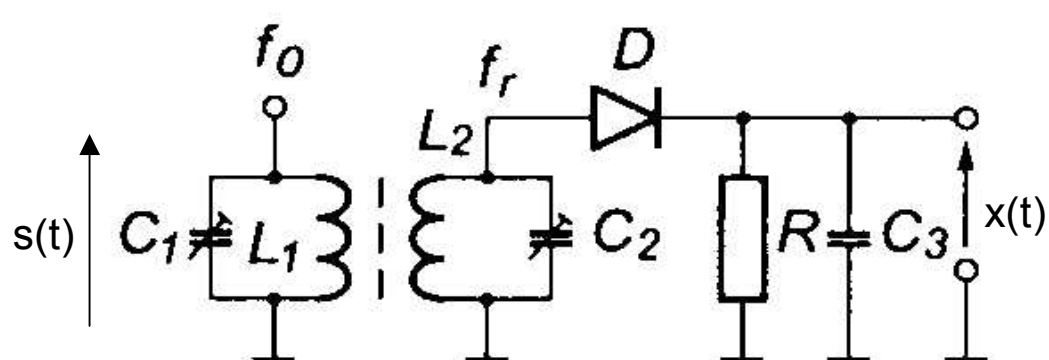
$$2) \quad |H(f)| = 2\pi f$$

$$s'(t) = \frac{ds(t)}{dt} = -A_0 [\omega_0 + 2\pi k_f x(t)] \sin(\omega_0 t + 2\pi k_f \int x(t) dt)$$

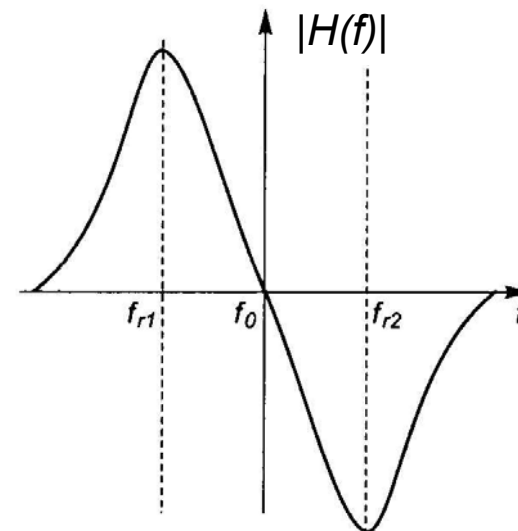
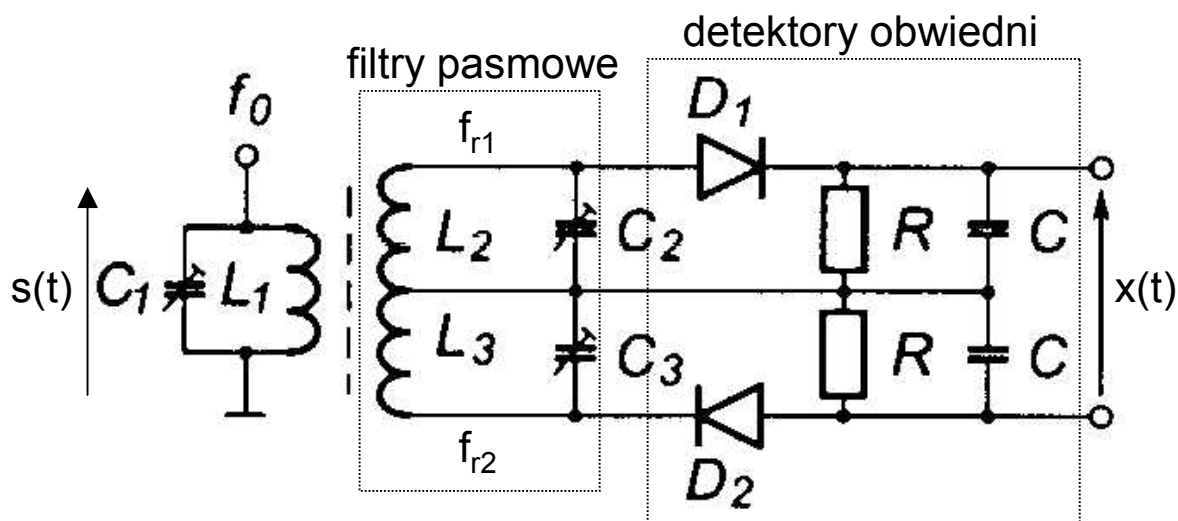
$$v(t) = A_0 [\omega_0 + 2\pi k_f x(t)]$$



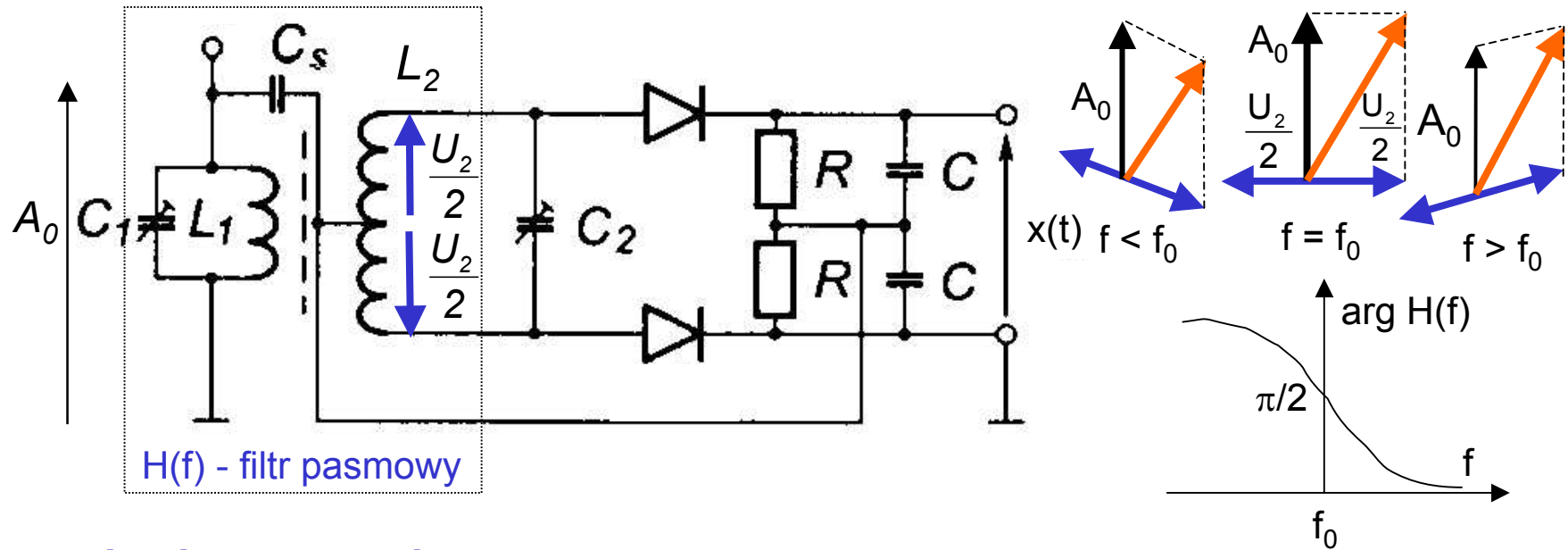
detektor z odstrojonym obwodem



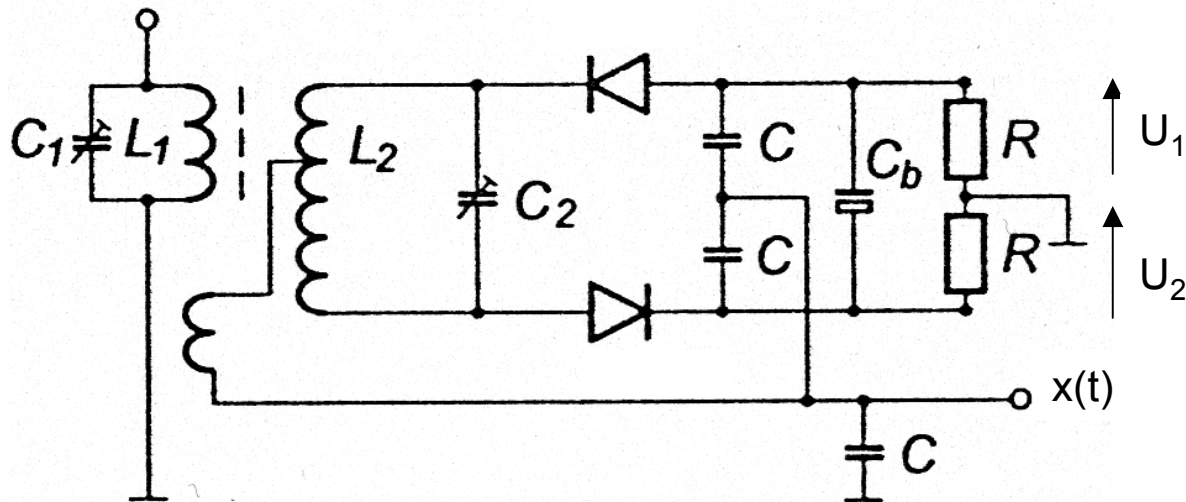
detektor z dwoma odstrojonymi obwodami



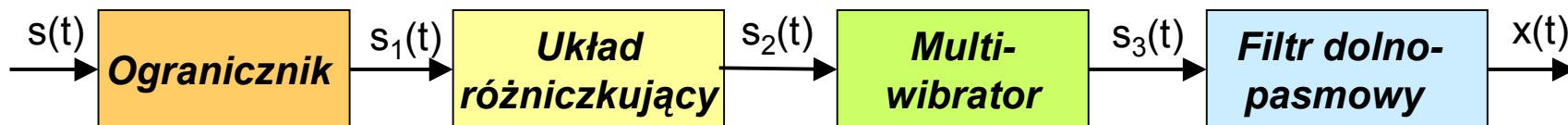
dyskryminator fazy



detektor stosunkowy

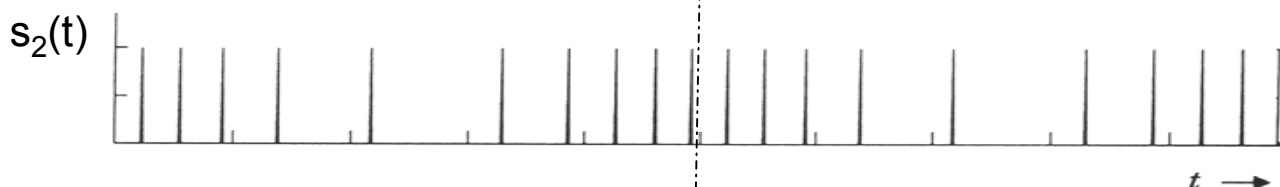
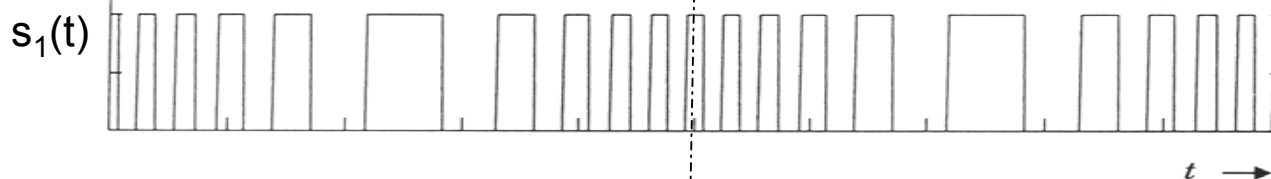
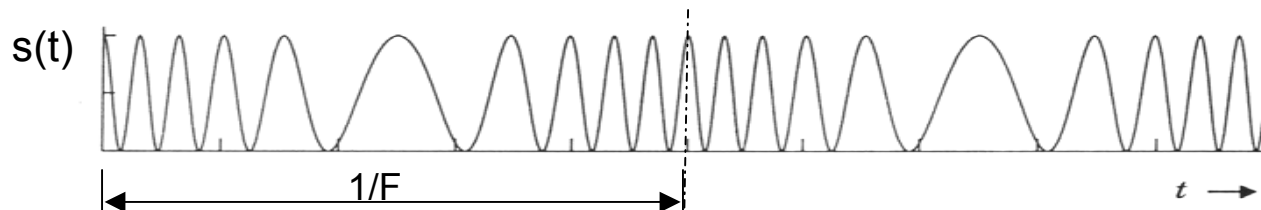


Detektor ze zliczaniem przejść przez zero sygnału FM

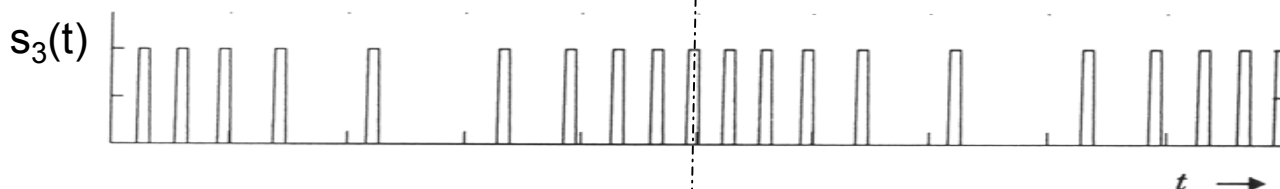


$$s(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + 2\pi k_f \int x(t) dt) = A_0 \cos(\omega_0 t + 2\pi k_f \int U \sin \Omega t dt) = A_0 \cos(\omega_0 t - m_f \cos \Omega t)$$

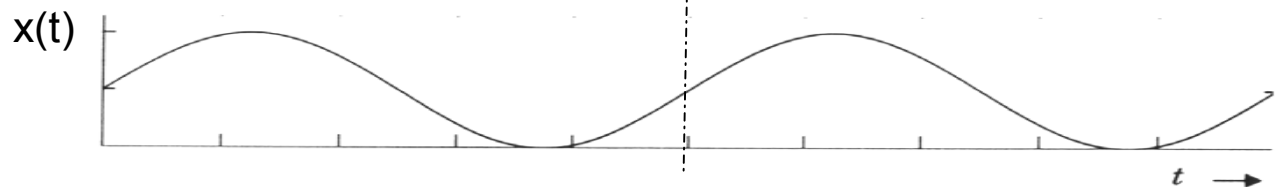
sygnał FM



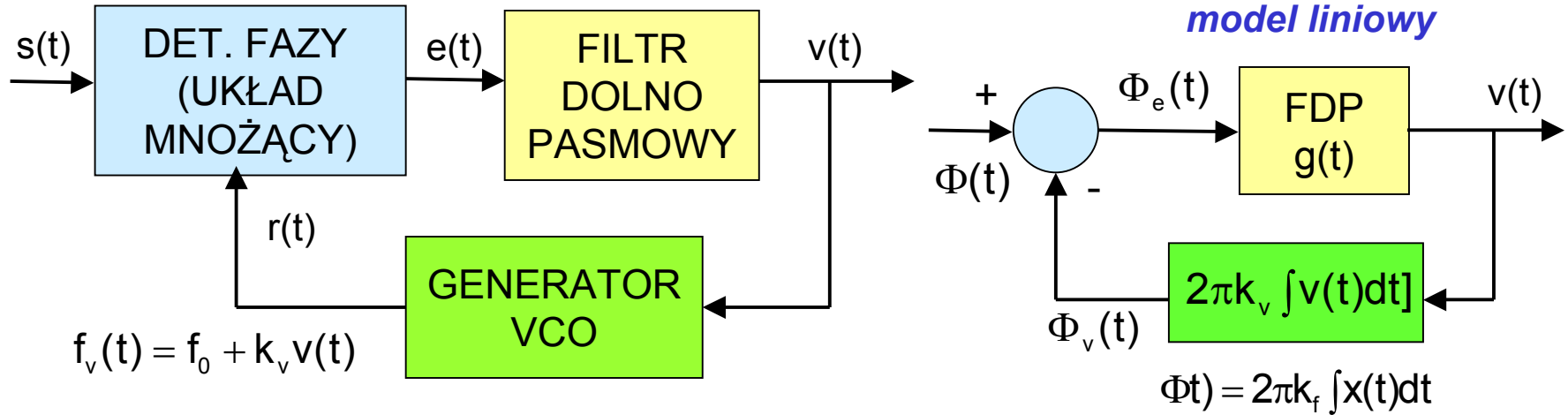
sygnał PPM



$$x(t) = U \sin(2\pi F t)$$



Detektor z pętlą fazową



$$s(t) = A_0 \sin[2\pi f_0 t + \Phi(t)] = A_0 \sin[2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int x(t) dt]$$

$$r(t) = A_v \cos[2\pi f_0 t + \Phi_v(t)] = A_v \cos[2\pi f_0 t + 2\pi k_v \int v(t) dt]$$

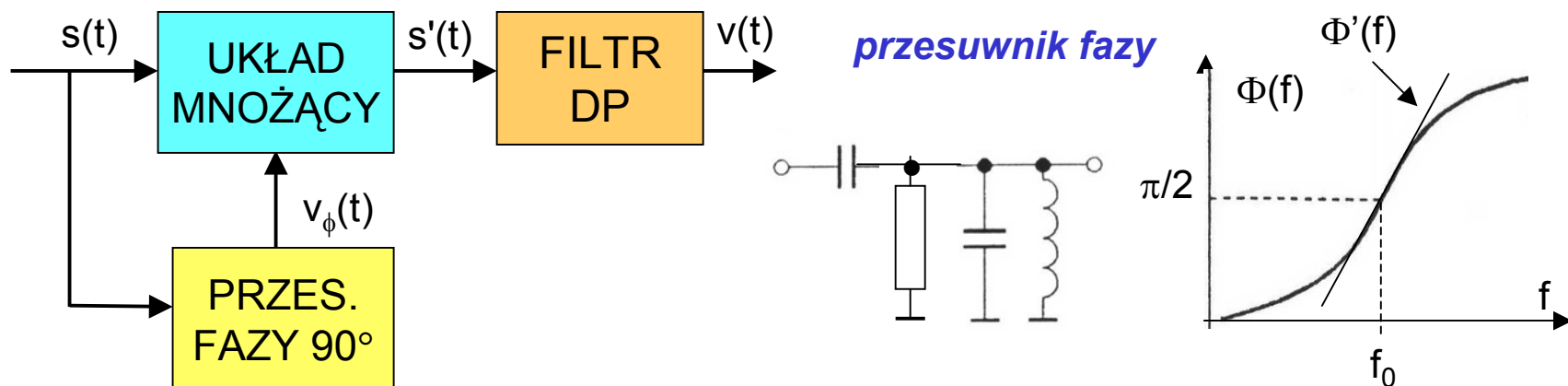
$$e(t) = \frac{1}{2} A_0 A_v \sin[\Phi(t) - \Phi_v(t)] \approx \frac{1}{2} A_0 A_v \Phi_e(t)$$

$$\frac{d}{dt} \Phi_e(t) + 2\pi \int v(t) dt = \frac{d}{dt} \Phi_e(t) + 2\pi k_v \int \Phi_e(\tau) g(t - \tau) d\tau = \frac{d}{dt} \Phi(t)$$

$$(j2\pi f) \Phi_e(f) + 2\pi k_v \Phi_e(f) G(f) = (j2\pi f) \Phi(f) \rightarrow \Phi_e(f) = \frac{jf}{jf + k_v G(f)} \Phi(f)$$

$$V(f) = \Phi_e(f) G(f) \approx \frac{jf}{k_v} \Phi(f) \rightarrow v(t) = \frac{1}{2\pi k_v} \frac{d}{dt} \Phi(t) = \frac{k_f}{k_v} x(t)$$

kwadraturowy detektor FM



$$s(t) = A_0 \cos[2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int x(t) dt], \quad \phi(f) = \frac{\pi}{2} + \arctan \left[Q \left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f} \right) \right] \approx \frac{\pi}{2} + \arctan \left[2Q \frac{f - f_0}{f_0} \right]$$

$$v_\phi(t) = A_0 \cos[2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int x(t) dt + \Phi'(f(t))]$$

$$\phi'(f) = \frac{\pi}{2} + 2\pi k(f - f_0)$$

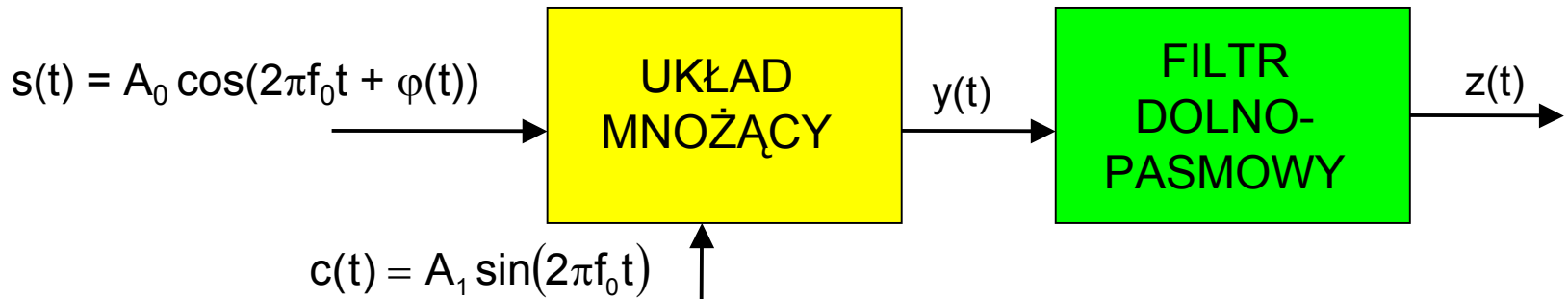
$$s'(t) = \frac{A_0^2}{2} \cos[4\pi f_0 t + 4\pi k_f \int x(t) dt + \Phi'(f(t))] + \frac{A_0^2}{2} \cos \Phi'(f(t))$$

$$f(t) = f_0 + k_f x(t)$$

$$v(t) = \frac{A_0^2}{2} \cos \Phi'(f(t)) = \frac{A_0^2}{2} \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2\pi k k_f x(t) \right) = \frac{A_0^2}{2} \sin(2\pi k k_f x(t))$$

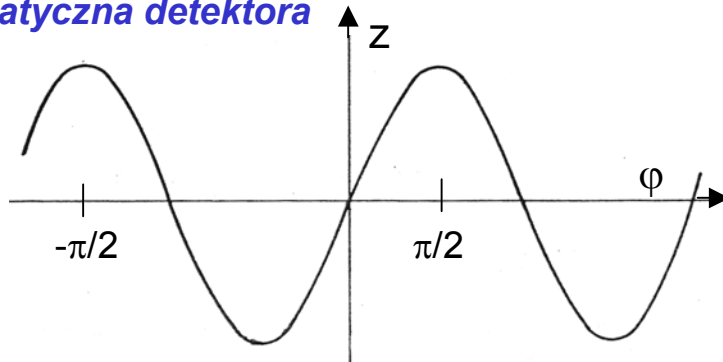
$$v(t) \approx A_0^2 k k_f x(t) = C x(t)$$

synchroniczny detektor PM



$$y(t) = A_0 A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi(t)) \sin(\omega_0 t) = \frac{1}{2} A_0 A_1 \sin(\varphi(t)) + \frac{1}{2} A_0 A_1 (\sin(2\omega_0 t) - \cos(2\omega_0 t))$$

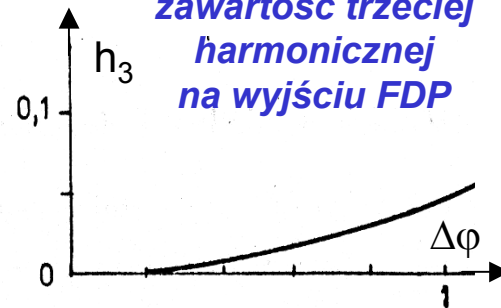
charakterystyka statyczna detektora



$$z(t) = k \sin(\varphi(t)) = k \left(\varphi(t) - \frac{\varphi(t)^3}{3!} + \frac{\varphi(t)^5}{5!} - \dots \right)$$

$$\varphi(t) = \Delta\varphi \cos \Omega t, \quad x(t) = k_\varphi U \cos \Omega t \quad \leftarrow \text{sygnał modulujący}$$

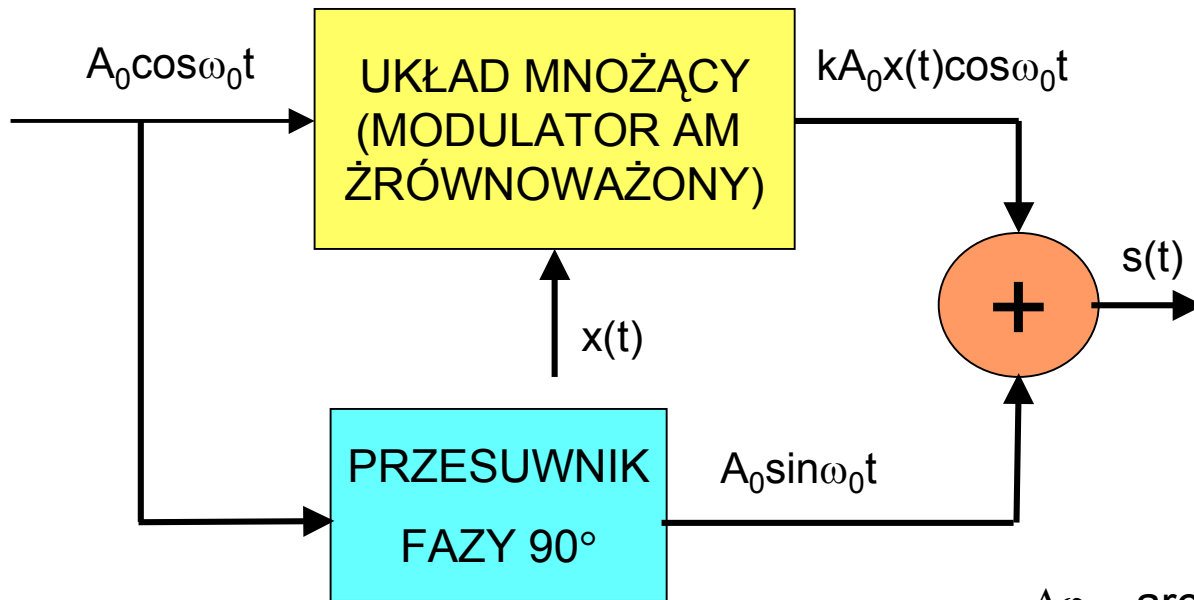
zawartość trzeciej harmonicznej na wyjściu FDP



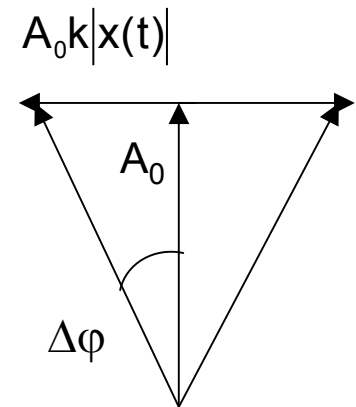
$$h_3 \approx \frac{\Delta\varphi^2}{24 \left(1 - \frac{1}{12} \Delta\varphi^2 \right)}$$

$$z(t) = k \left(\Delta\varphi \cos \Omega t - \frac{\Delta\varphi^3}{6} \cos^3 \Omega t + \dots \right)$$

kwadraturowy modulator PM



wykres wskazowy



$$\Delta\varphi = \arctan k|x(t)|_{\max} \approx k|x(t)|_{\max} = kU$$

$$x(t) = U \cos \Omega t$$

$$s(t) = A_0 \sin \omega_0 t + kx(t)A_0 \cos \omega_0 t$$

$$\varphi(t) = \arctan kx(t) = kx(t) - \frac{k^3 x^3(t)}{3!} + \frac{k^5 x^5(t)}{5!} - \dots,$$

$$\varphi(t) = kU \cos \Omega t - \frac{k^3 U^3}{6} \cos^3 \Omega t + \dots = \Delta\varphi \cos \Omega t - \frac{\Delta\varphi^3}{6} \cos^3 \Omega t + \dots \approx \Delta\varphi \cos \Omega t$$

$$h_3 \approx \frac{\Delta\varphi^2}{24 \left(1 - \frac{1}{12} \Delta\varphi^2 \right)}$$