

MODELE OBRAZÓW

Materiały KWOD, A.Przelaskowski

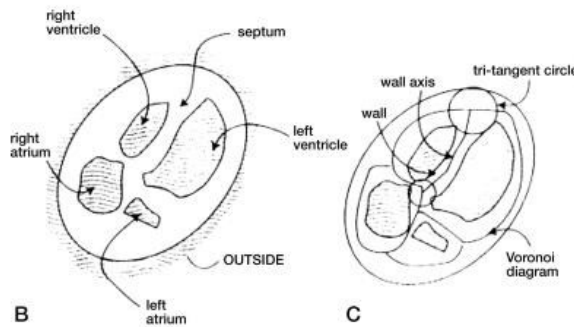
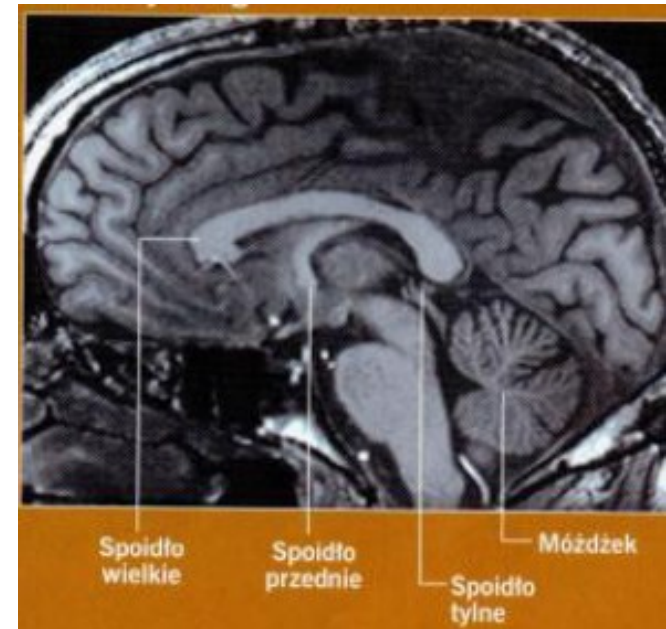
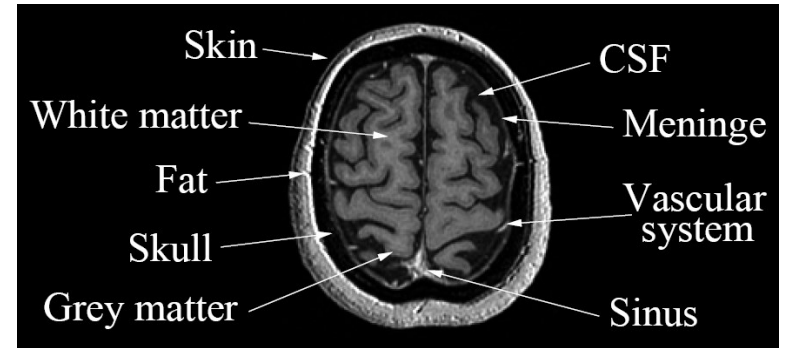
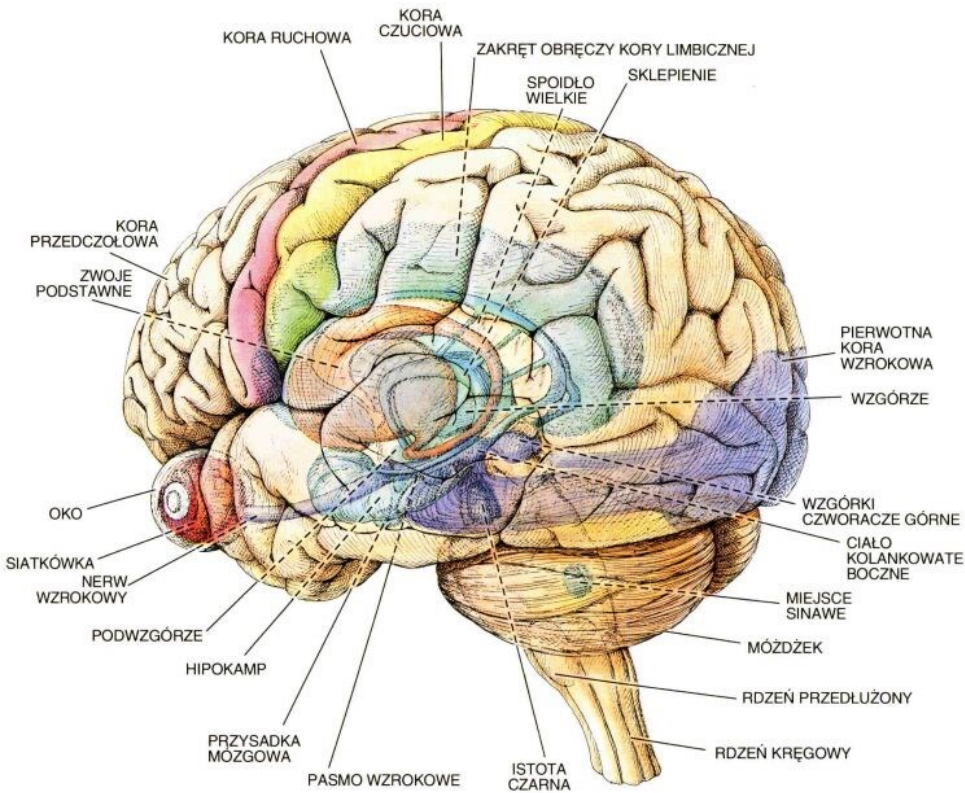
- Przegląd metod modelowania obrazów
- Konceptyjne podstawy algorytmów CAD

MODEL – przybliżony, sformalizowany opis (zwykle sparametryzowany, o określonej formie i złożoności) wycinka rzeczywistości, uwzględniający wszystkie istotne jego właściwości i obejmujący określony zbiór cech

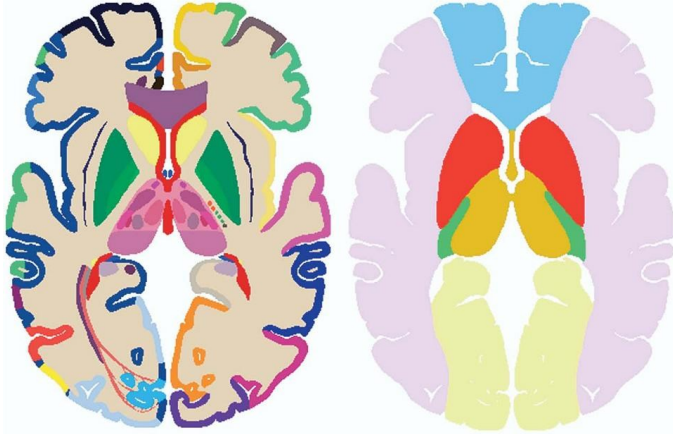
Zasady

- Powtarzanie rodzi kreatywność
 - Czwarty wymiar, czyli głębokość
 - Metafora, czyli odwzorowanie stanu rzeczy jednej dziedziny na stan rzeczy innej dziedziny (p.w. przeniesienie mechanizmów wnioskowania)
 - Metafory zawsze towarzyszą myśleniu abstrakcyjnemu (matematyka królową abstrakcji)
 - Przykłady: krzykliwa sukienka, sesja jest wyjątkowo ciężka, wojna na argumenty, obalić twierdzenia, opuszczę cię aż do śmierci, przysłowia czy przypowieści
 - Narzędzia poznania: zmysły, czyli doświadczenie + rozumienie
 - Obrazy - subitacja: wzrokowa percepcja struktur rozpoznawczych (komponenty rozpoznawane podświadomie, szybka reakcja)
 - Model (z poznania zjawisk) i interpretacja (odniesienie do konkretnego zjawiska)
 - Narzędzia abstrakcji: matematyka (myślenie abstrakcyjne) = percepcja + język (kognitywny)
 - Środki: multimodalne pojęcia konkretne (neurony lustrzane)
 - Metoda
 - Struktura informacji (efekt poznania) – reprezentacja
 - Model, czyli multimodalna integracja – struktura i treść
 - Mechanizmy funkcjonalne (m.in. relacje, formy wnioskowania, wynikanie) – metody uczenia modelu
 - Symulacja (p.w. wyobrażenia) – platforma urzeczywistnienia
 - Parametryzacja – formuły optymalizacji
 - Działanie (realizacja - efekторы, weryfikacja, konkluzje) – technologia implementacji, testy, referencje
-

Po pierwsze: model semantyczny



Atlas



Komputerowe atlasy mózgu wykorzystywane w Biomedical Imaging Laboratory, Singapur

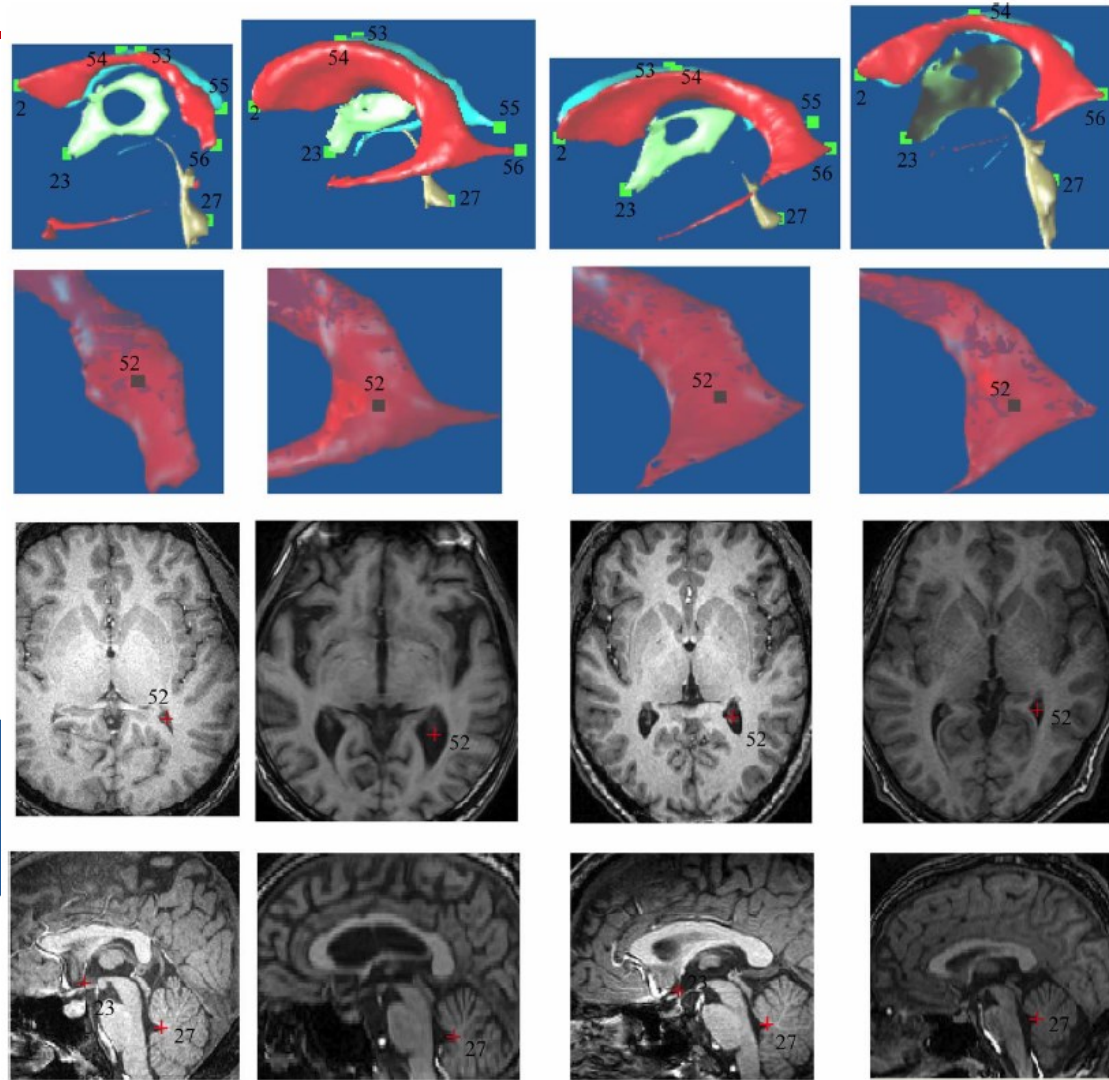
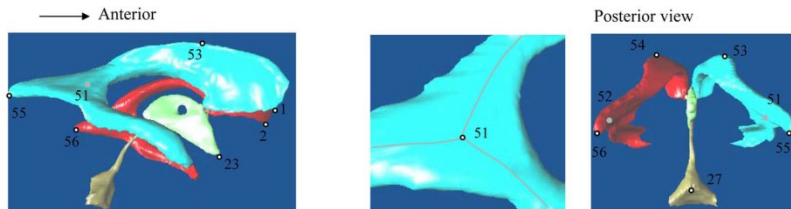
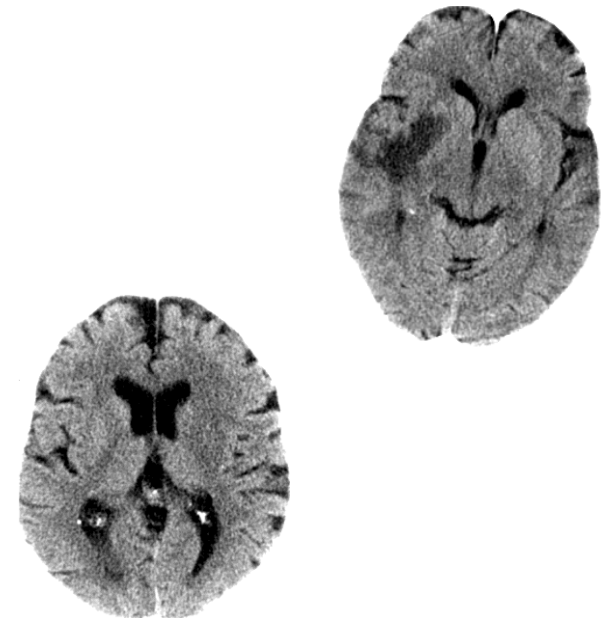
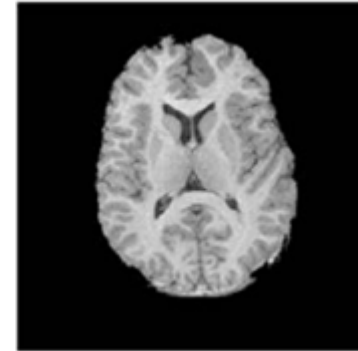
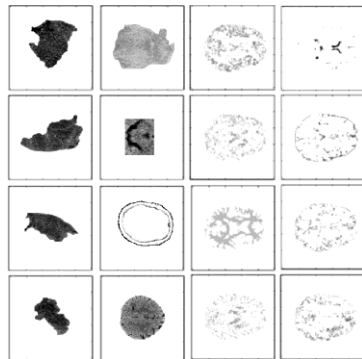
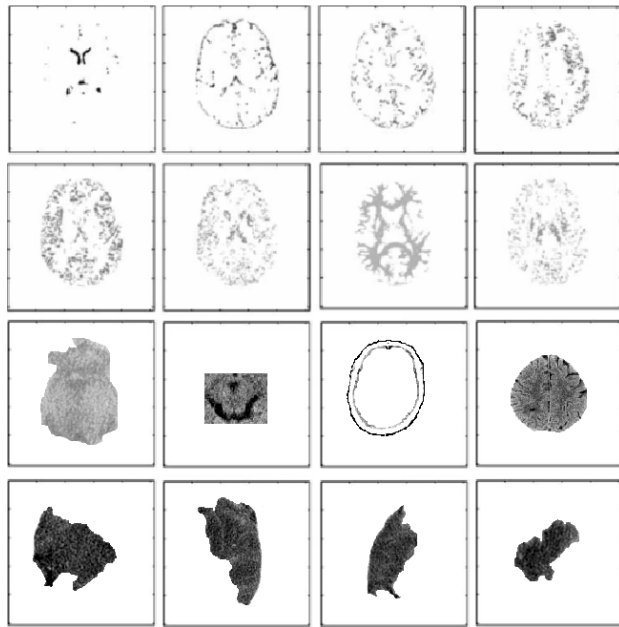
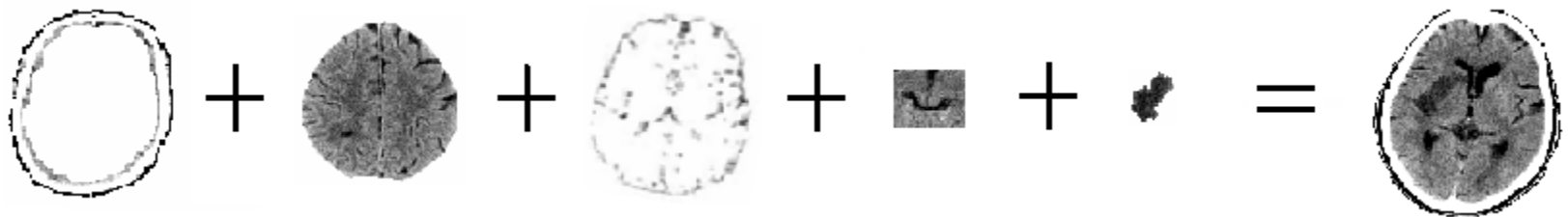
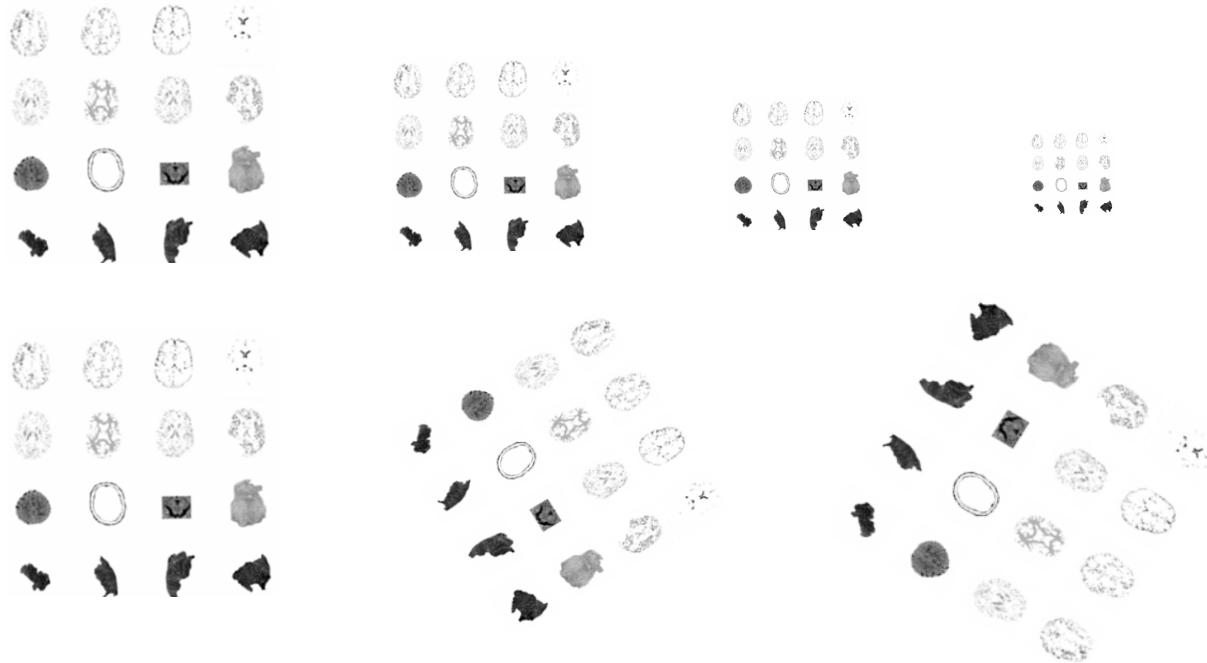


Fig. 4. Four ventricular systems and the detected landmarks from the clinical scans in WJ-30. Four columns from the left to right indicate: normal child, abnormal elder, normal male adult, and abnormal male adult. The four rows from the top to bottom indicate the 3-D views of the ventricular system, the 3-D views of the landmark 52, axial original MR slice indicating the detected landmark 54, and sagittal MR slice indicating the detected landmark 27 (and 23 if it is also detected in the slice).

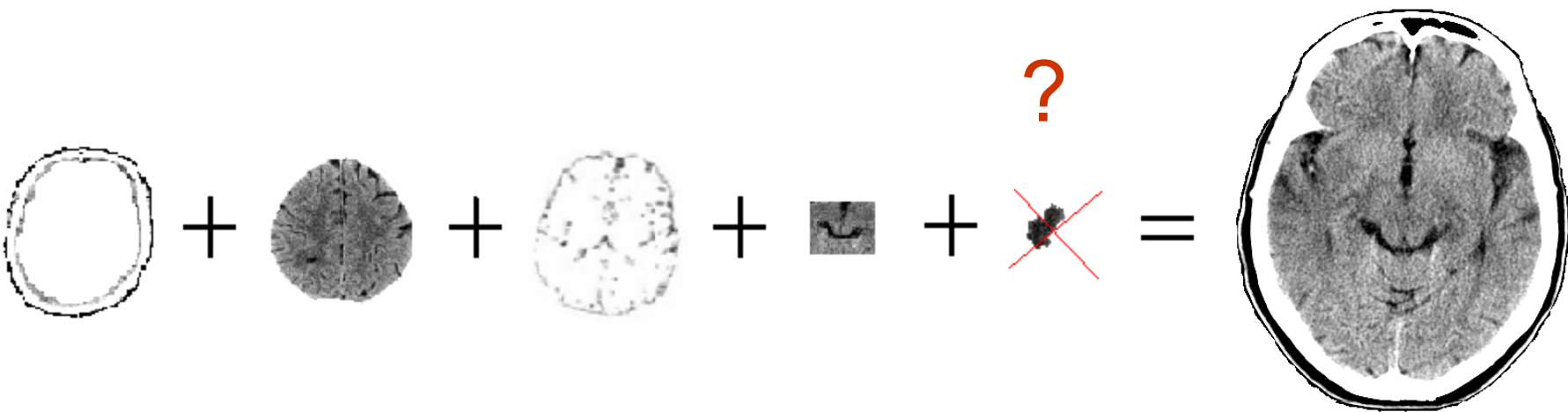
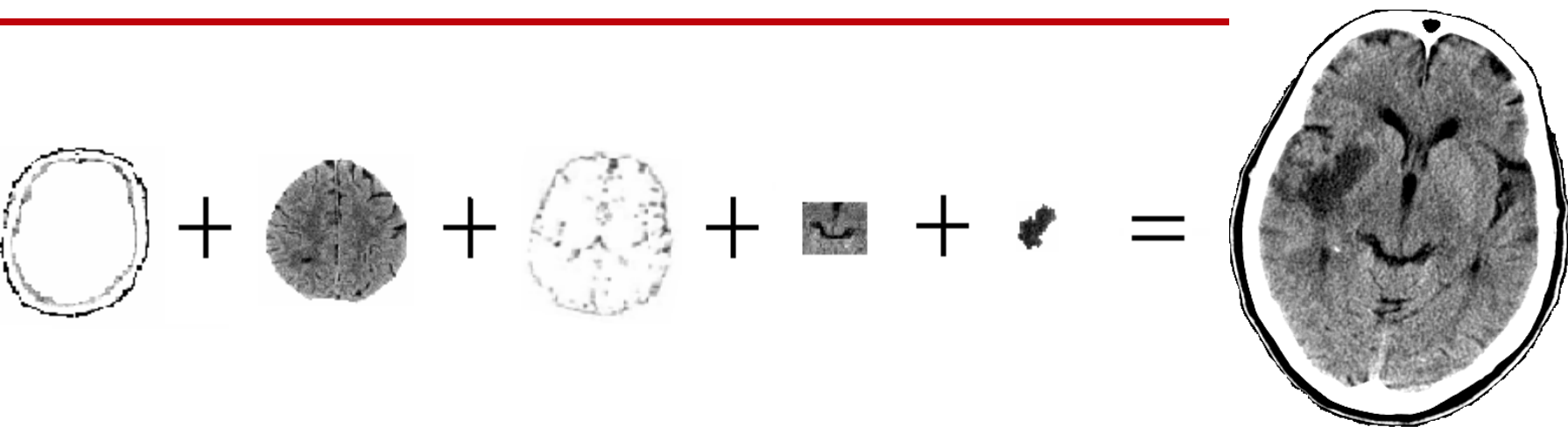
Poszukiwanie 'dobrej' reprezentacji atlasowego opisu komponentów



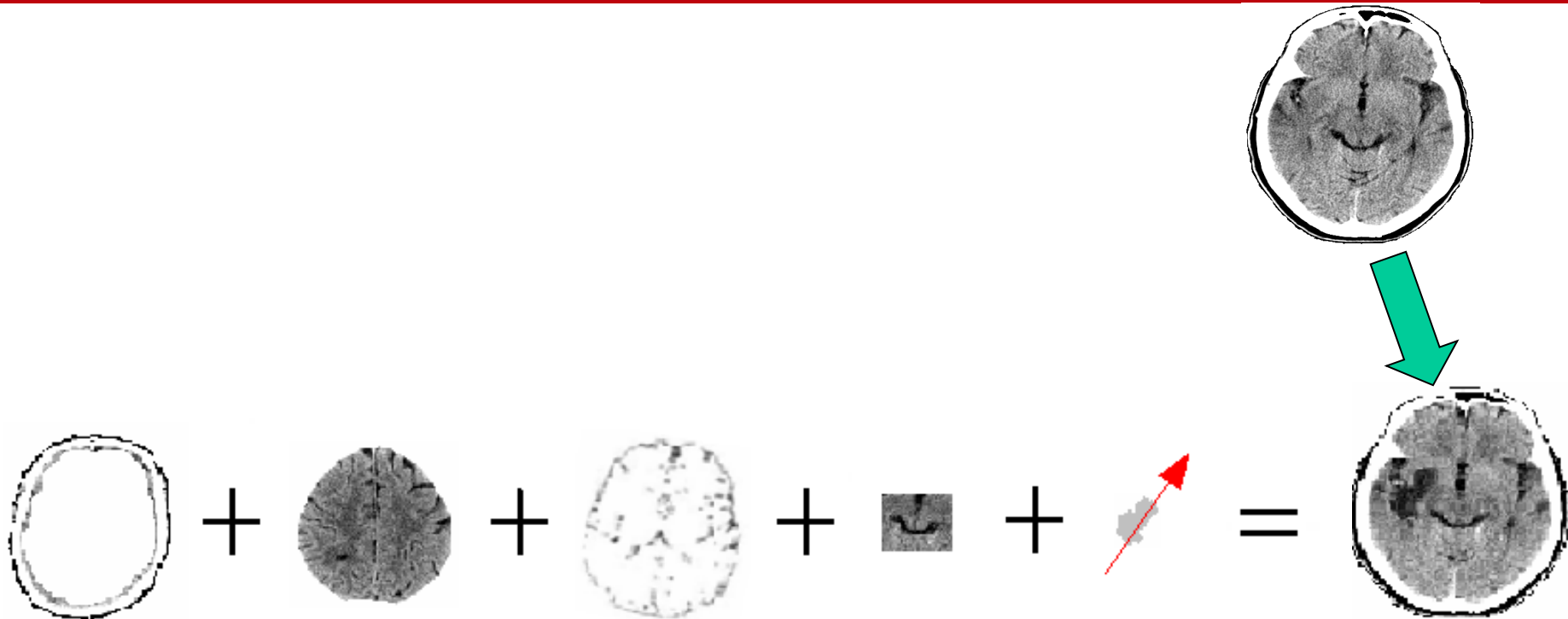
Baza opisu udarów w CT



Rekonstrukcja obrazu

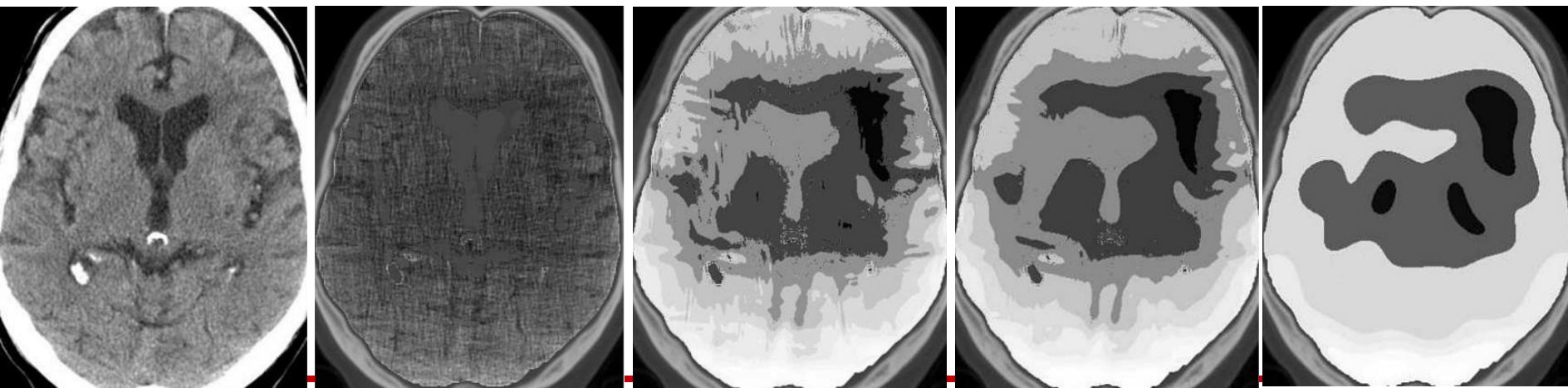
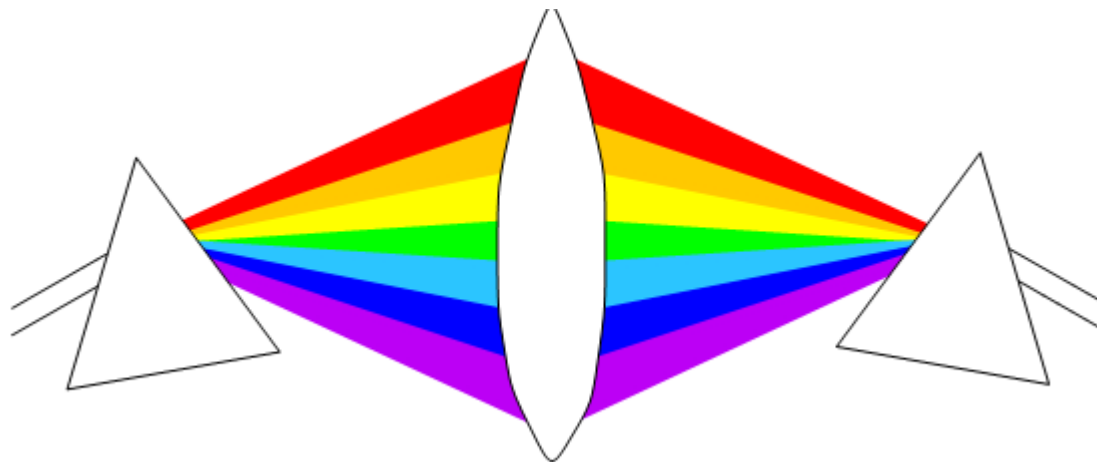


Wyszukanie i wzmocnienie



- reprezentacja (możliwość wyszukania)
- przekształcenie (selektywne wzmocnienie określonej cechy sygnału użytecznego)

Modele z wydzielaniem komponentów



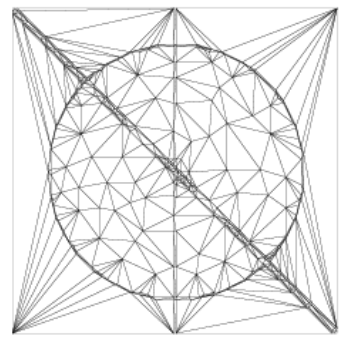
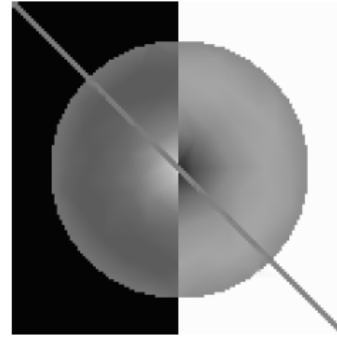
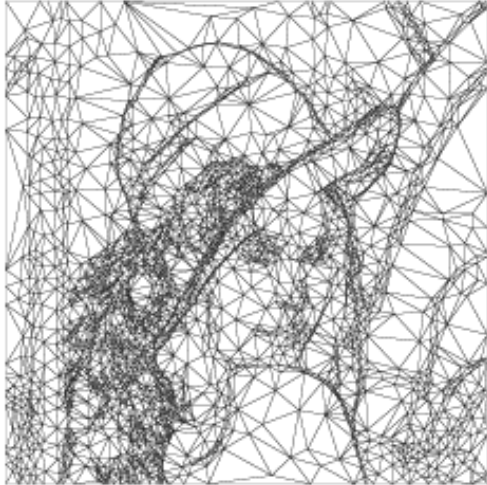
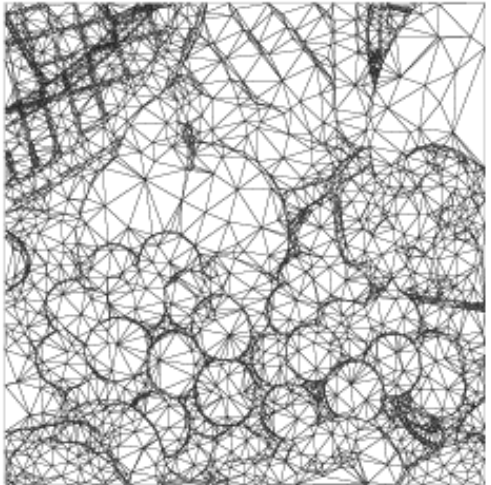
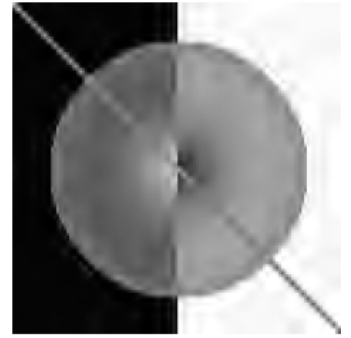
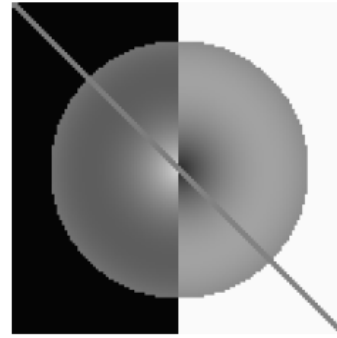
Obliczeniowe sposoby modelowania

- Model geometryczny (elementy *a priori*)
- Model obiektowy (elementy *a posteriori*)
- Model probabilistyczny (statystyczny)
- Model funkcjonalny (tj. wykorzystujący predykcję lub dekompozycję na bazie atomów czas-częstotliwość)

Cechy ‘dobrego’ modelu:

- specyficzność (uwzględnia semantykę)
 - wiarygodny opis szumów i artefaktów
 - wielorozdzielczość (różne skale)
 - hierarchiczność (uwzględnia różnego typu relacje)
 - niestacjonarność (lokalność i adaptacyjność)
 - elastyczność (łatwa zmiana parametrów)
-

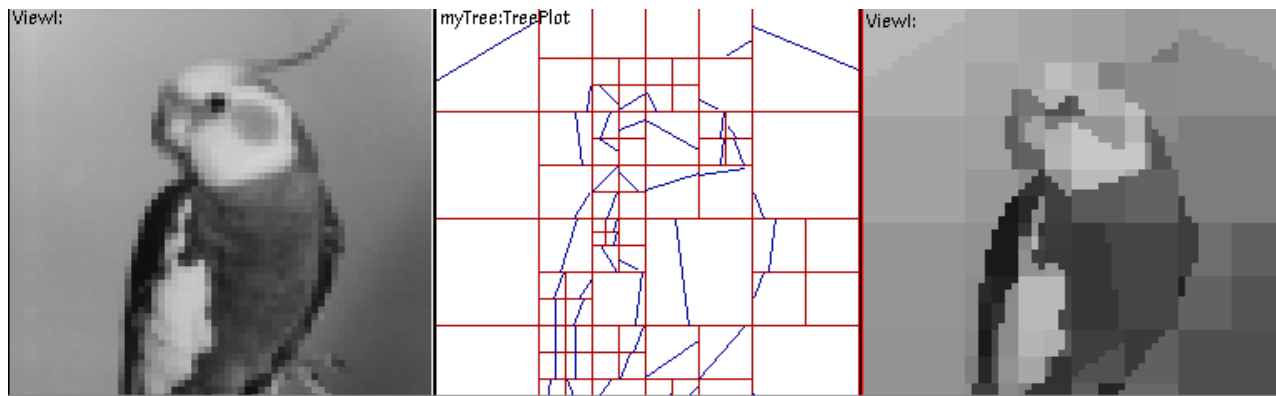
Modele geometryczne, czyli rozkład prymitywów



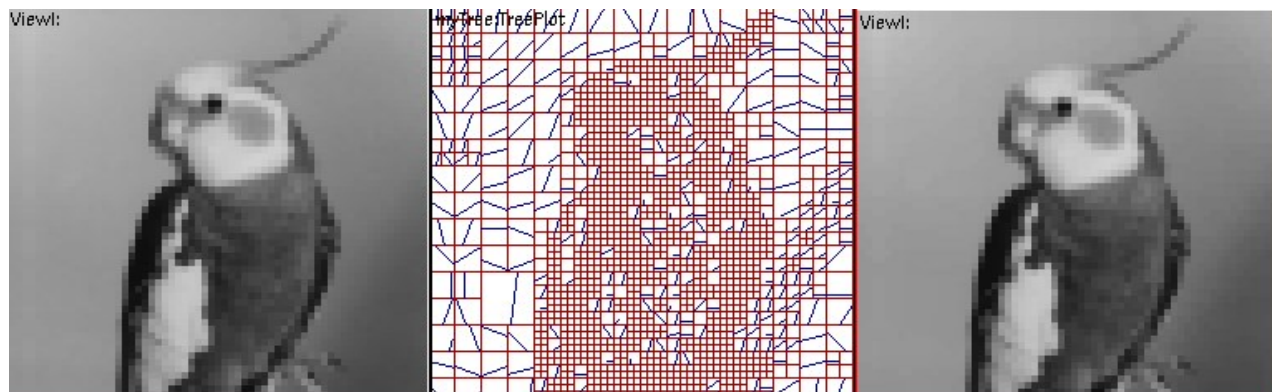
Baza geometryczna (wedgelets)

Aproksymacja obrazów zbiorem 'kawałków-klinów' o stałej wartości funkcji jasności określonych w dziedzinie obrazu (podział dziedziny rozłączny i zupełny)

$$I = \bigcup_{w \in W} w \quad \text{i } w - \text{const}$$

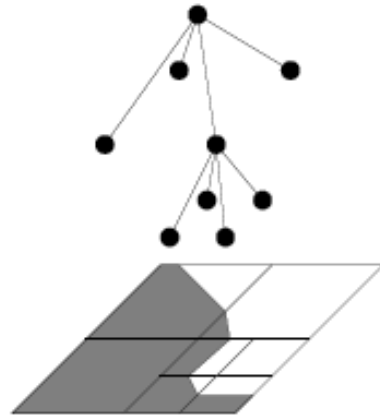


zgrubnie



dokładniej

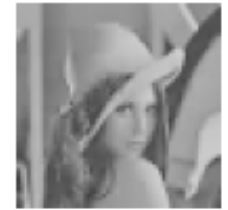
Modelowanie z Wedgelets



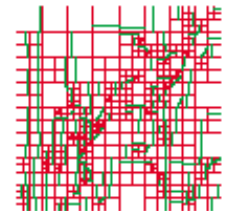
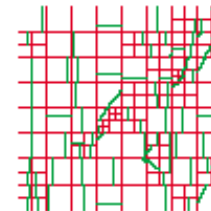
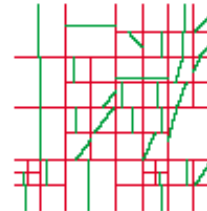
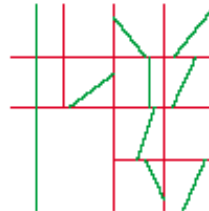
Coarse Scale



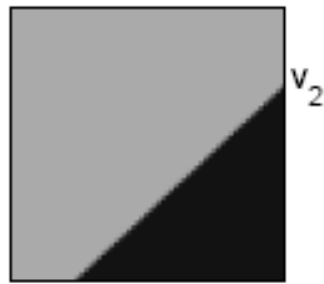
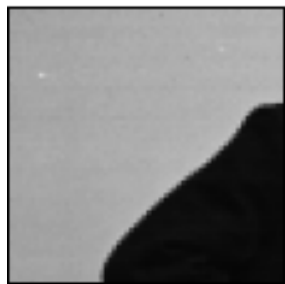
Fine Scale



Wedgelet Partition



Residuals

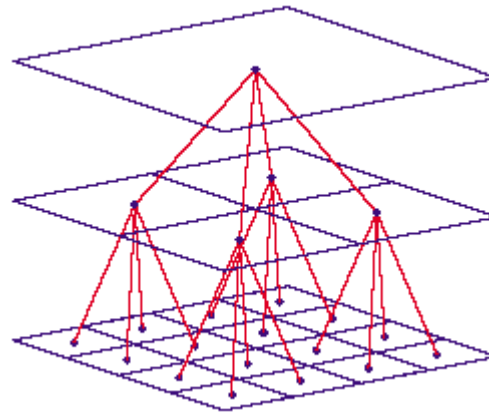


aproksymacja za pomocą liniowych nieciągłości (klin) - błąd przybliżenia regulowany skalą

D.L. Donoho, X. Huo, 'Beamlets and Multiscale Image Analysis'

Dekompozycja na kwadraty

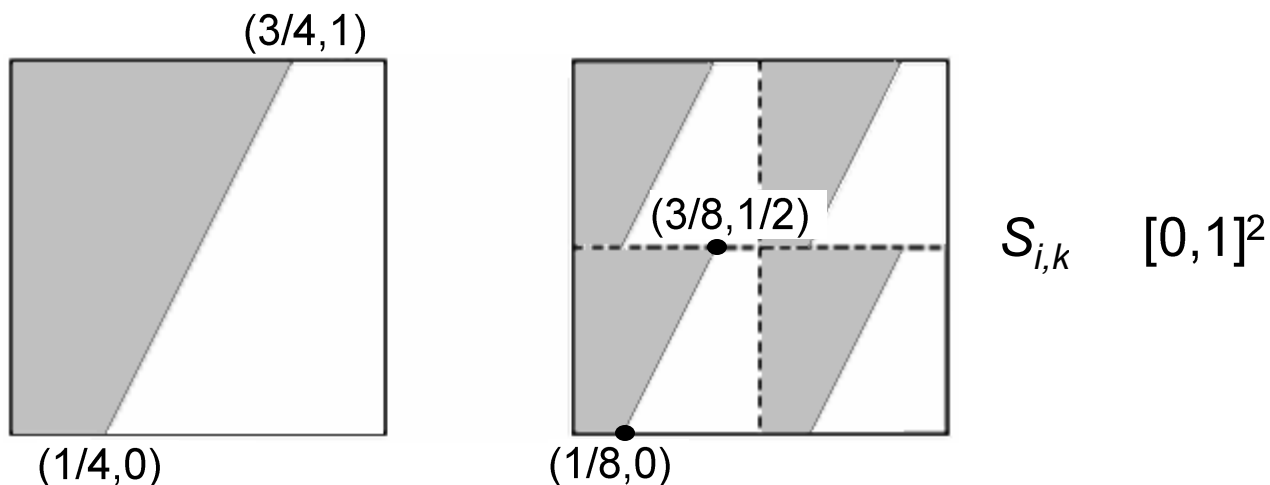
- segmentacja drzewa czwórkowego (hierarchiczna struktura dekompozycji:
podział obrazu $I([0,1]^2)$ na bloki S (kwadraty 2^k), $k=0, \dots, K$



piramida dekompozycji

Dekompozycja na kawałki-kliny

- Dokładniejsze przybliżanie kwadratów funkcją kawałkami stałą o liniowej nieciągłości



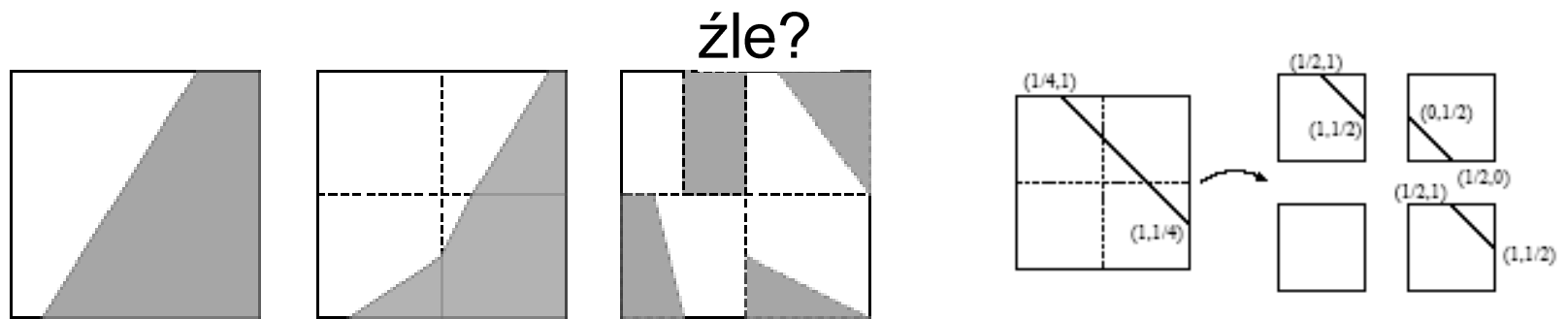
analogiczne orientacje w kolejnych skalach

Daje to dużą złożoność obliczeniową algorytmu dekompozycji:
 $O(MN^2 \log_2 N^2)$ dla obrazu $N \times N$ i M orientacji w S

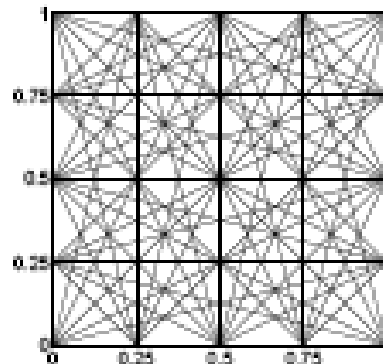
Przyspieszenie algorytmu dekompozycji

Optymalizacja metody podziału:

- Zależność projekcji w różnych skalach



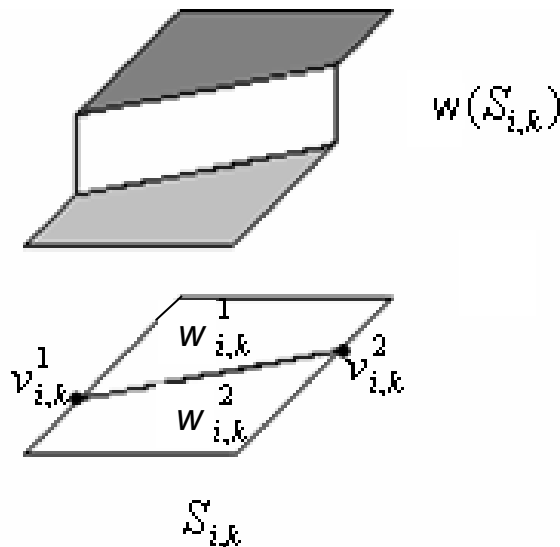
- Ustalenie liczby orientacji w poszczególnych blokach



baza: kierunki wedgelets, różne skale i położenie bloku

Wedgelets (falki W)

Wedgelet (falka W) jest to kawałkami stała funkcja określona na kwadracie diadycznym (długość boku jest równa 2^k) z nieciągłością liniową.



Definicja falki W dla $S_{i,k}$:
 $(v_{i,k}^1, v_{i,k}^2), w_{i,k}^1, w_{i,k}^2$

Kwadrat S podzielony na dwa regiony jest dziedziną falki. Orientację liniowej nieciągłości określa para punktów v , a wartości funkcji są stałe w obu regionach

Falka W jest zdegenerowana jeśli funkcja jest stała ($w(S_{i,k}) = \text{const}$ - bez nieciągłości)

Kwadraty i kliny - porównanie

oryginał



kwadraty



kliny



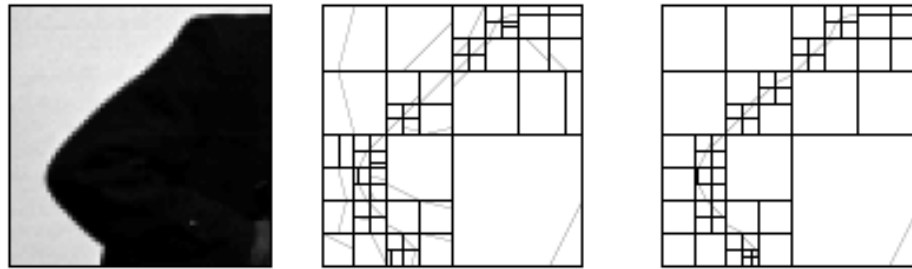
?



Aproksymacja liniowa
funkcji jasności (platelets)

Rekonstrukcja (synteza) z falkami W

- Dekompozycja: rzutowanie funkcji jasności z S w przestrzeń falek W (ustalenie orientacji oraz w^1 i w^2) o różnych skalach
- Wybór optymalnej reprezentacji: **aproksymacja**, **upakowanie informacji** oraz **geometria konturów**



różne efekty podziału

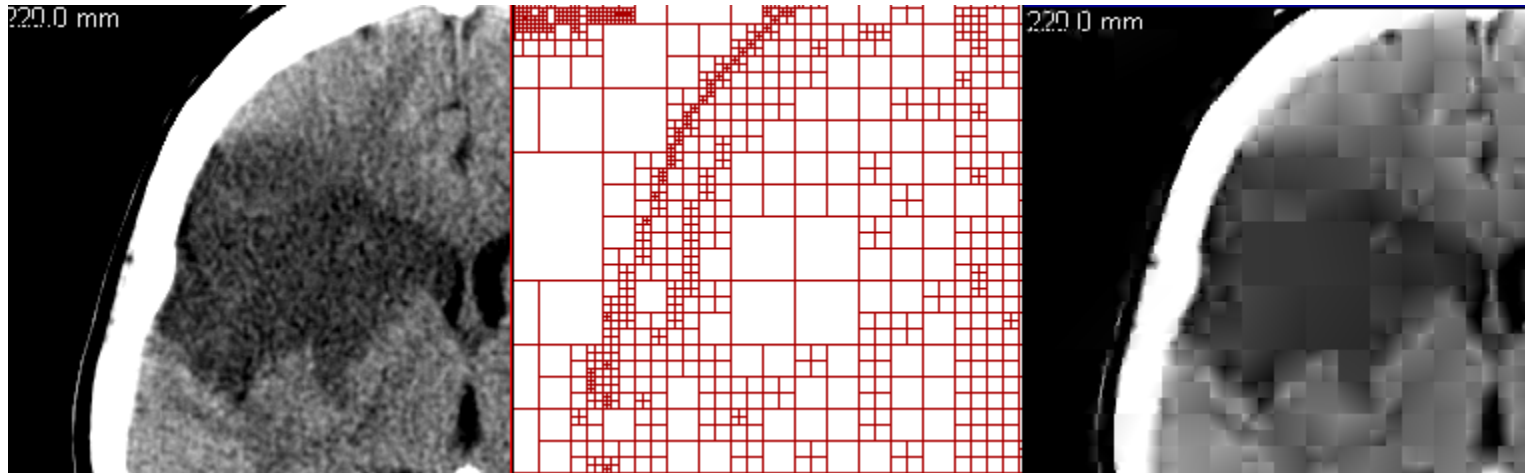
Metoda: optymalizacja z wykorzystaniem funkcjonału Lagrange'a:

$$\min_W D + \lambda |W|$$

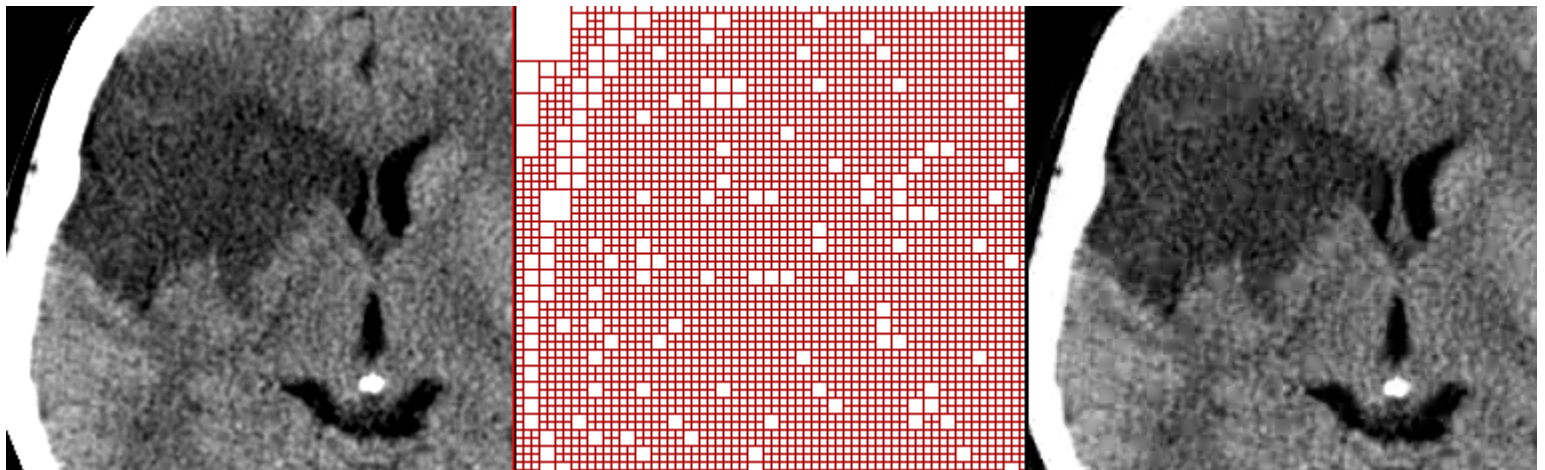
Realizacja: optymalizacja lokalna, potem globalna

- Kryterium geometrii: modele Markowa budowane na strukturze drzewa czwórkowego pozwalają ustalić dobre relacje pomiędzy skalami dając gładką geometrię konturów (minimalizacja entropii z prawd. warunkow.)

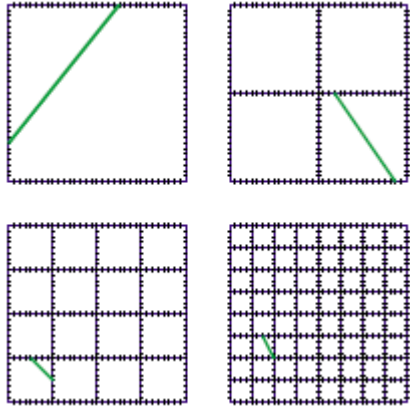
Wedgelets: synteza obrazu mózgu



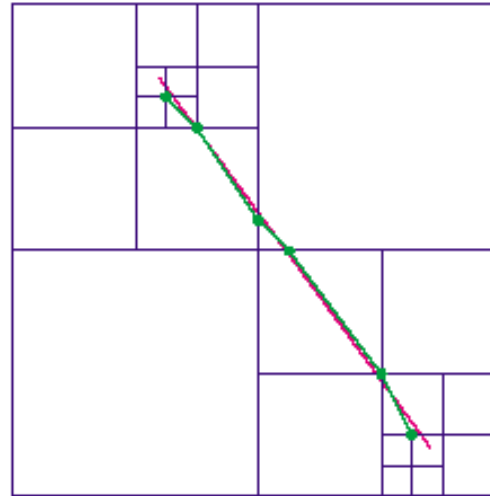
który model jest efektywniejszy?



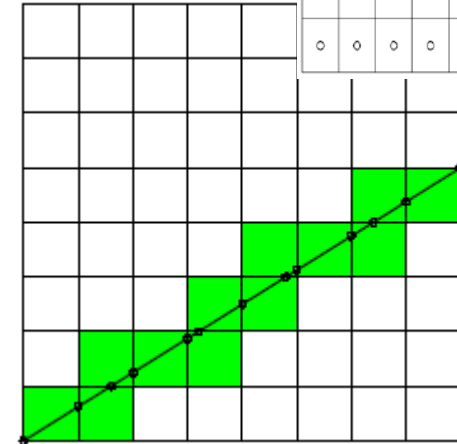
Modelowanie z Beamlets



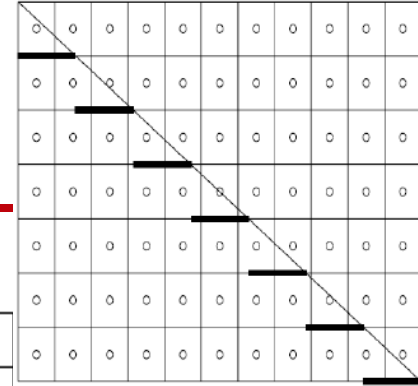
Beam – liniowe segmenty w kwadratach S



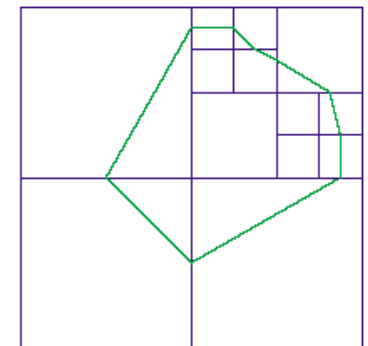
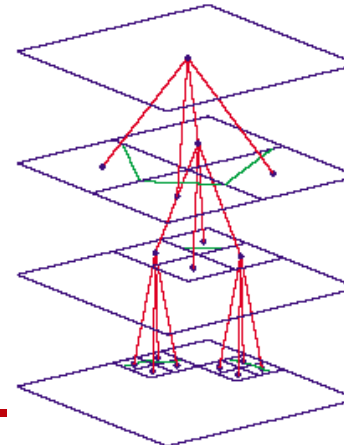
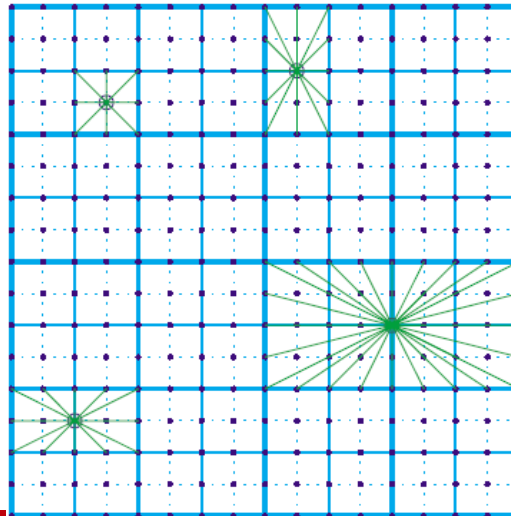
składanie linii



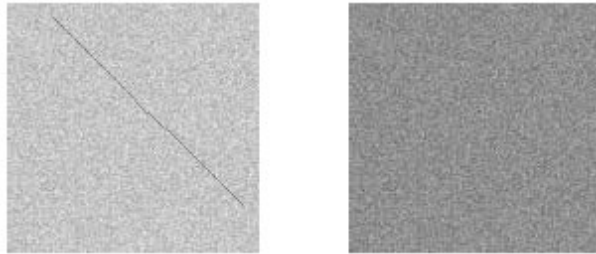
Transformacja beamlets – ważona suma wartości pikseli kwadratów pokrytych linią



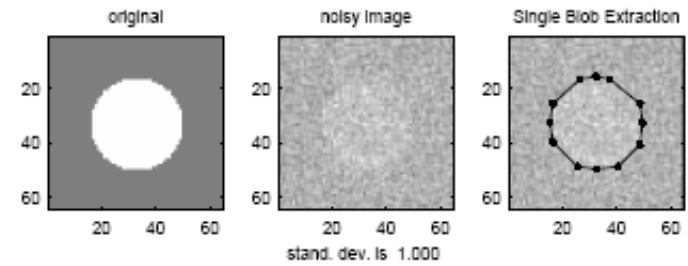
Beamlets – określony podzbiór możliwych segmentów liniowych w S



Wykorzystanie beamlets

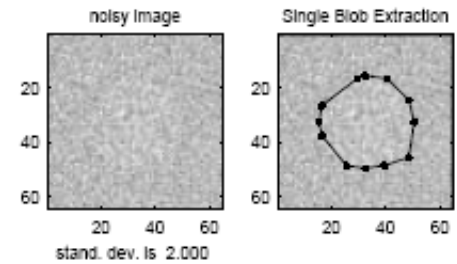


detekcja krawędzi: łatwa i trudna



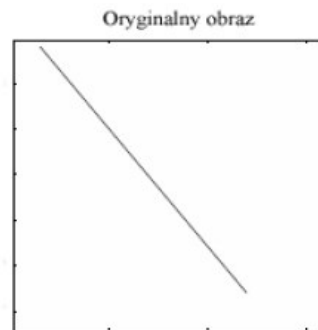
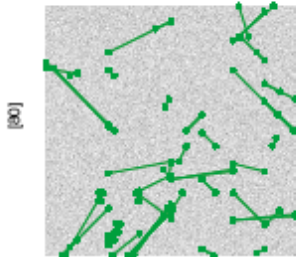
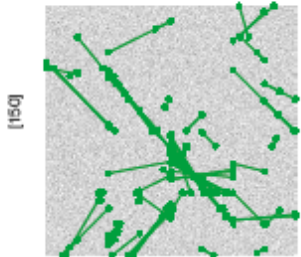
(1) Original Object

(2) Noisy Picture



(3) active beamlets when signal is present

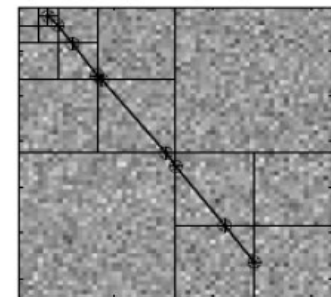
(4) active beamlets when signal is absent



Obraz zaszumiony

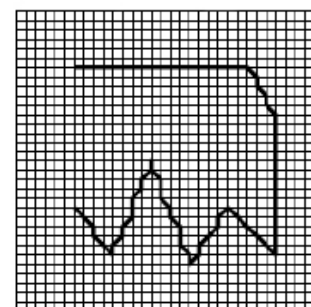
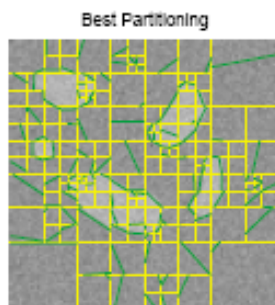
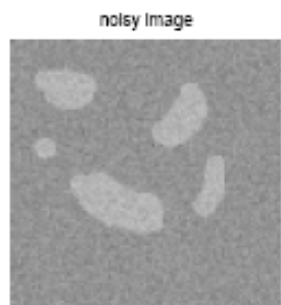
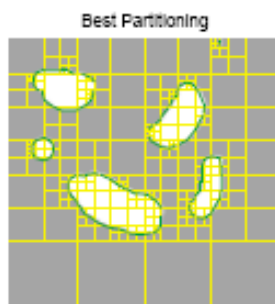
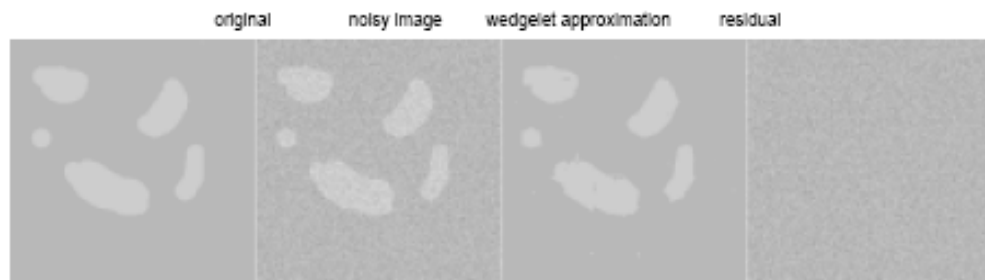


Aproksymacja przy pomocy ciągu beamletów

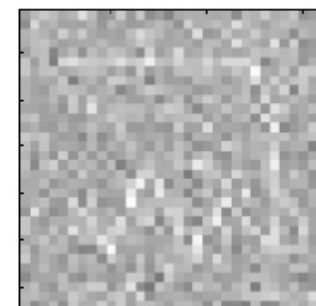


D.L. Donoho, X. Huo, 'Beamlets and Multiscale Image Analysis'

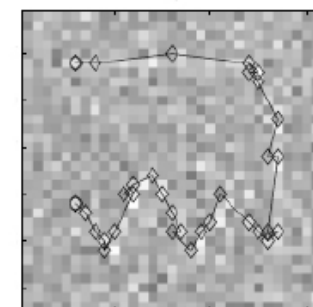
Zastosowania



Oryginalna krzywa



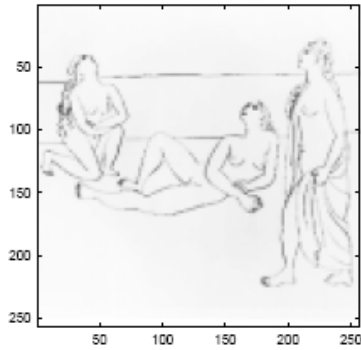
Krzywa po dodaniu szumu



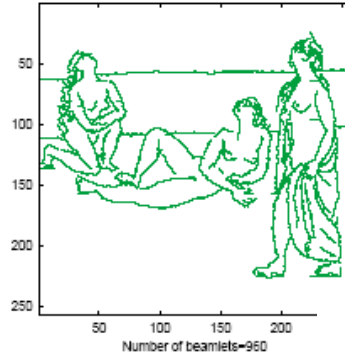
Aproksymacja łańcuchem beamletów

Efekty

Picasso

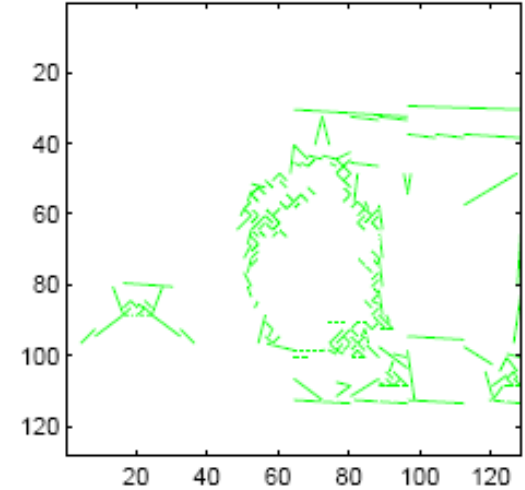
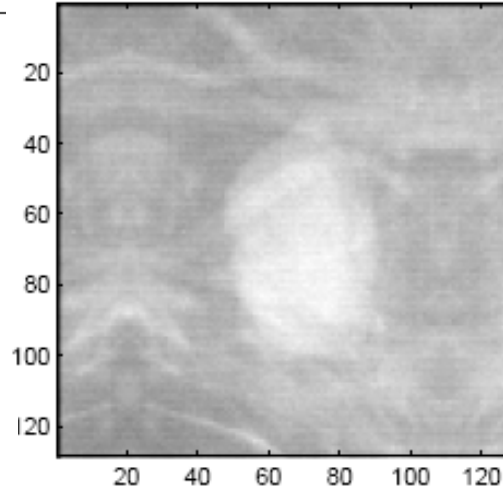


Recovered by Beamlet-driven RDP

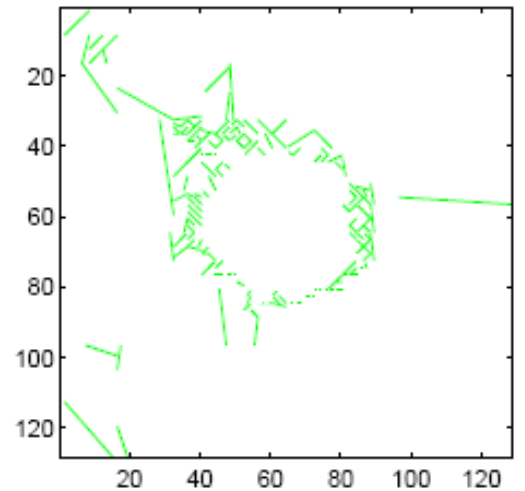
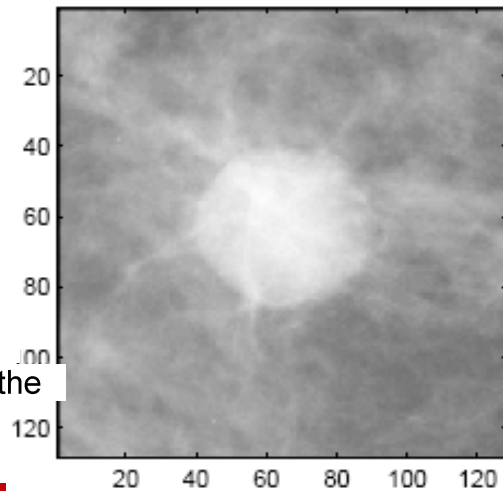


D.L. Donoho, X. Huo, 'Beamlets and Multiscale Image Analysis'

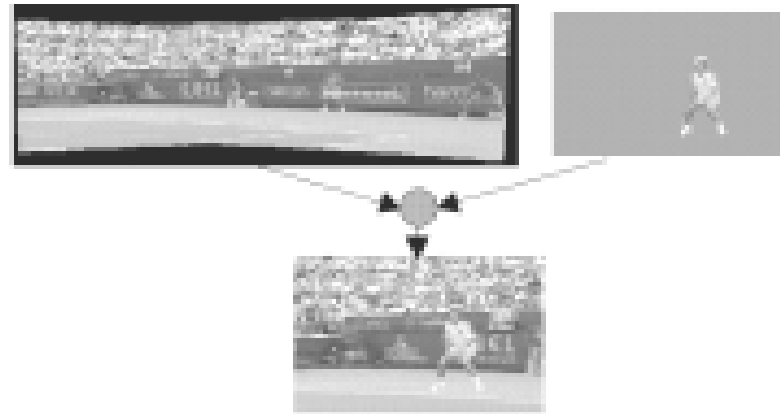
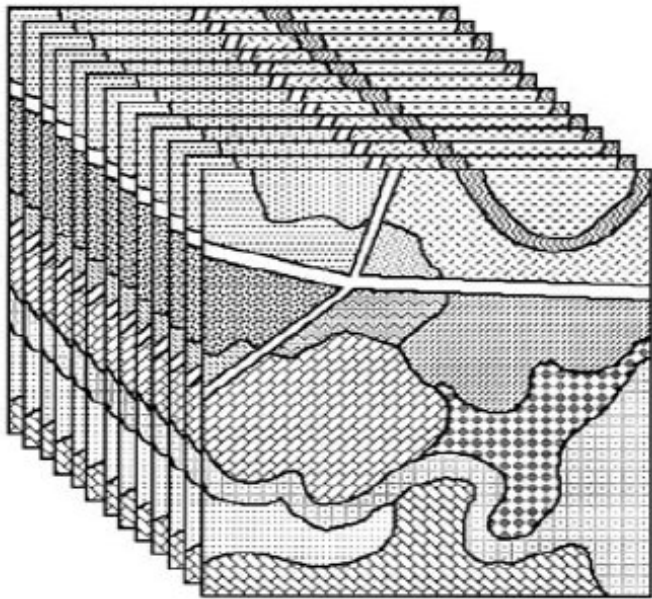
Jak opisać guzek w mmg?



M.P. Sampat, A.C. Bovik, M.K. Markey, 'Classification of mammographic lesions into BI-RADS™ shape categories using the Beamlet Transform'

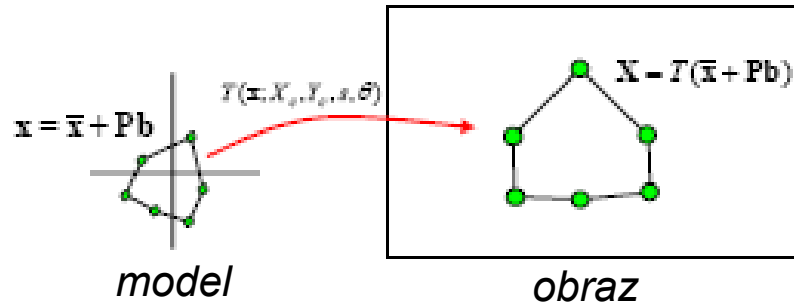


Modele obiektowe: segmentacja obiektów w obrazie

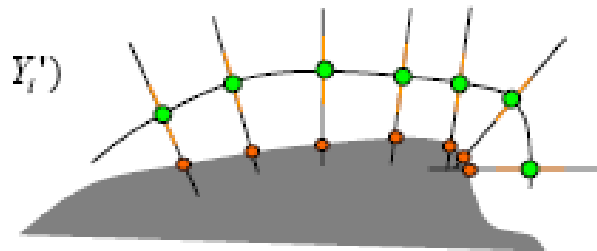
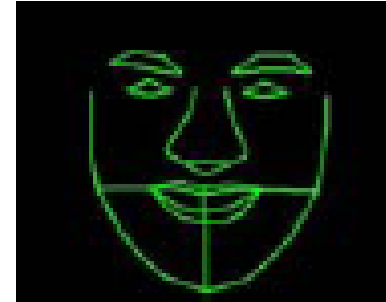


opis wyższego rzędu – obiekty zamiast prymitywów

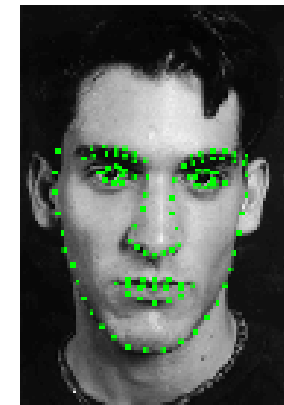
Modele obiektowe, czyli pasowanie wzorców (dane treningowe)



1) wpisanie modelu w obraz



2) dopasowanie

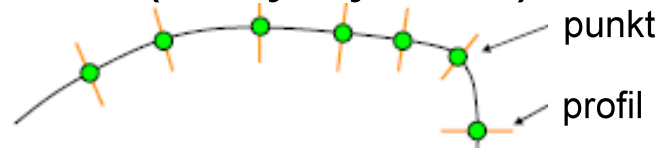


Metoda aktywnych konturów (kształtów) - *snakes*

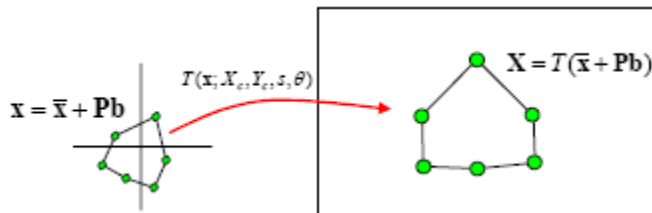
- Skalowalny wzorzec z danych treningowych (różne parametry modelu) - elastyczny model opisuje **typowy kształt** krawędzi obiektu pasowany do obrazu



- Model punktu i profilu (statystyczne)



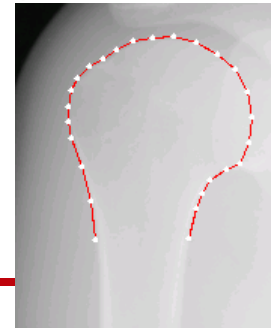
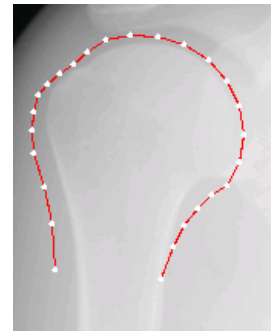
- Dopasowanie do realnego kształtu obiektu



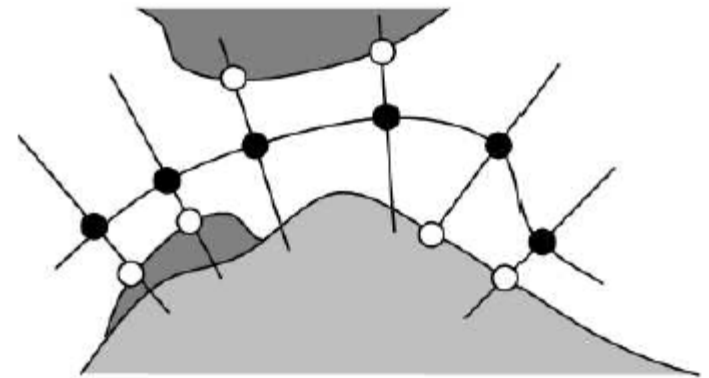
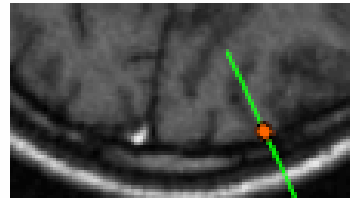
*globalne przekształcenie wstępne
(często manualne)*

ACM nieco dokładniej

- Minimalizowana jest energetyczna **funkcja kosztu** napędzając ruch konturu
 - człon wewnętrzny kontroluje właściwości krzywej (regularność, gładkość) rozstrzygając wpływ dwóch składników działających w przeciwnych kierunkach
 - odpychającego (rozciągającego) i przyciągającego (kurczącego)
 - efekt: usztywnione lub bardziej elastyczne zachowanie krzywej
 - człon obrazowy działa na podstawie analizy lokalnych gradientów
 - kontroluje proces wpasowywania w obiekty obrazu o pożądanych właściwościach
 - określa kierunek i zakres przesuwania punktów konturu w kolejnych krokach dopasowania
 - ustala warunek stopu
 - człon użytkowy nakłada dodatkowe ograniczenia (np. poprzez interaktywne modyfikacje parametrów modelu czy też uwzględnienie specyficznej wiedzy)
- Zalety i wady
 - Szybki algorytm, interakcja, włączenie wiedzy a priori
 - Wskazana kontrola użytkownika (metoda półautomatyczna)
 - Nie zawsze największy gradient jest rozwiązaniem optymalnym

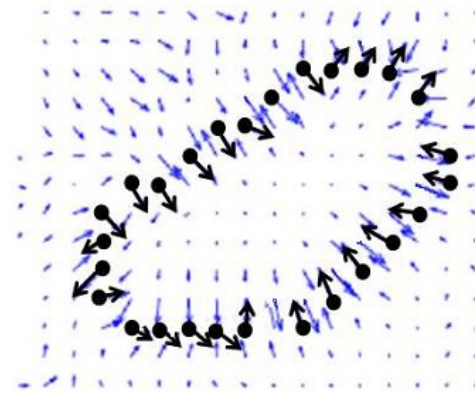


Problem wpasowania



Metoda aktywnych kształtów - ASM

- wykorzystuje **statystyczne modele kształtu obiektów**
- iteracyjna deformacja kształtów, z możliwością dopasowania w krawędzie o zadanej rozkładem charakterystyce
- **mapa krawędzi**: uwzględnienie całego rozkładu lokalnych rozkładu gradientów funkcji jasności, ich kierunku oraz wartości – szacowanie mapy krawędzi (zbiór wektorów zaczepionych w kolejnych punktach obrazu i wskazujących kierunek do znajdujących się w pobliżu krawędzi oraz ich siłę) - $\vec{M}(x, y)$



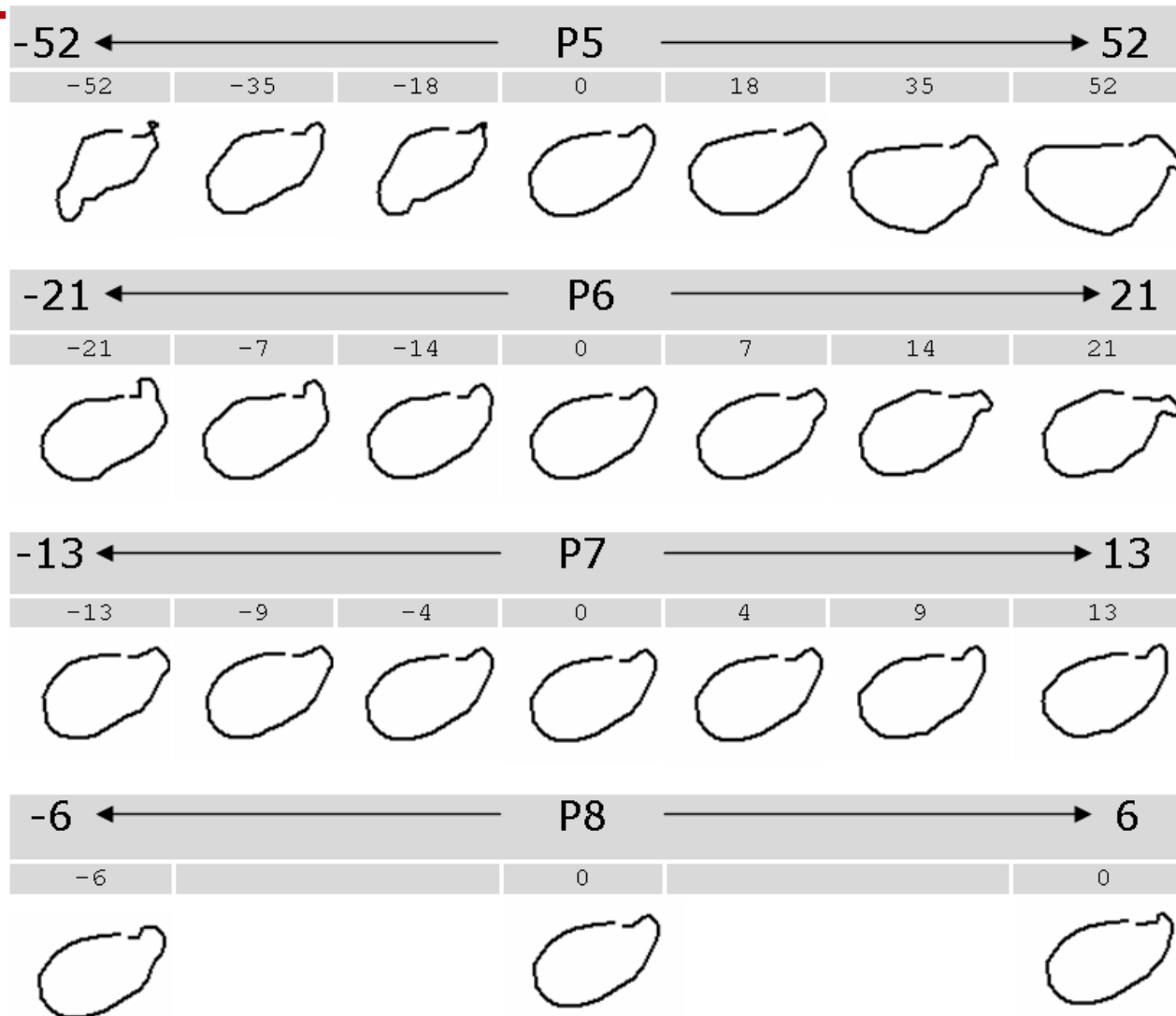
$$|\nabla f(x, y)| = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta$$

- prędkość poruszania się każdego z pikseli w kierunku najistotniejszej krawędzi

$$\vec{v}(x, y) = \frac{a_1 - a_2 c}{g(|\vec{M}(x, y)|)} \cdot \vec{N}(x, y) = v(x, y) \cdot \vec{N}(x, y)$$

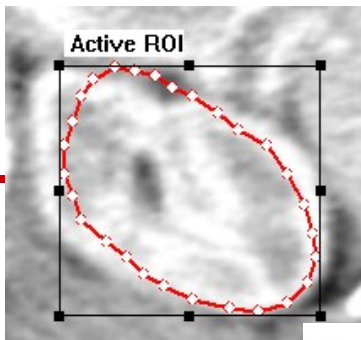
g – skalowanie, c – stopień krzywizny konturu, a_1, a_2 - stałe, wpływające na dynamizm przemieszczania konturu oraz jego gładkość, \vec{N} - normalna do ściągającej krawędzi

ASM - przykłady



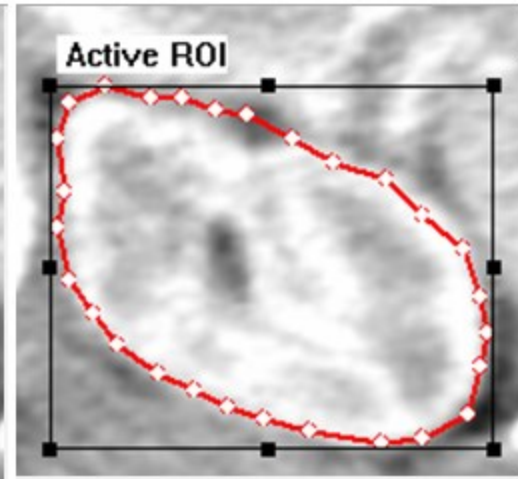
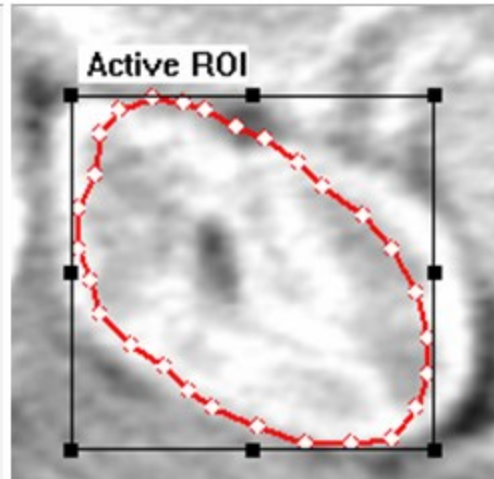
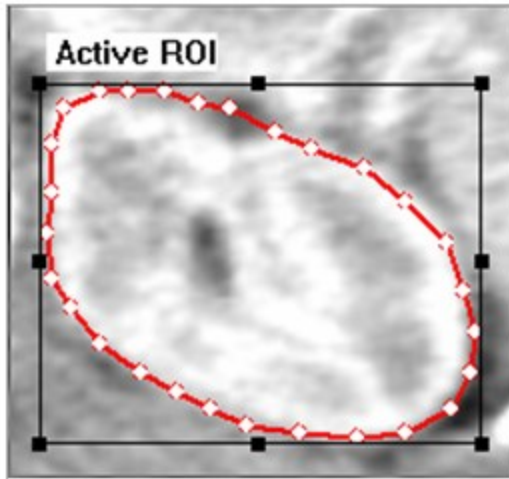
Efekt zmieniania kolejnych parametrów w modelu kształtu lewej nerki

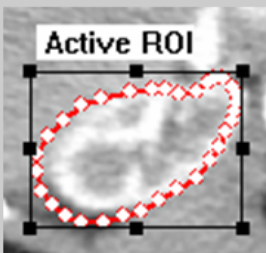

ASM - przykłady

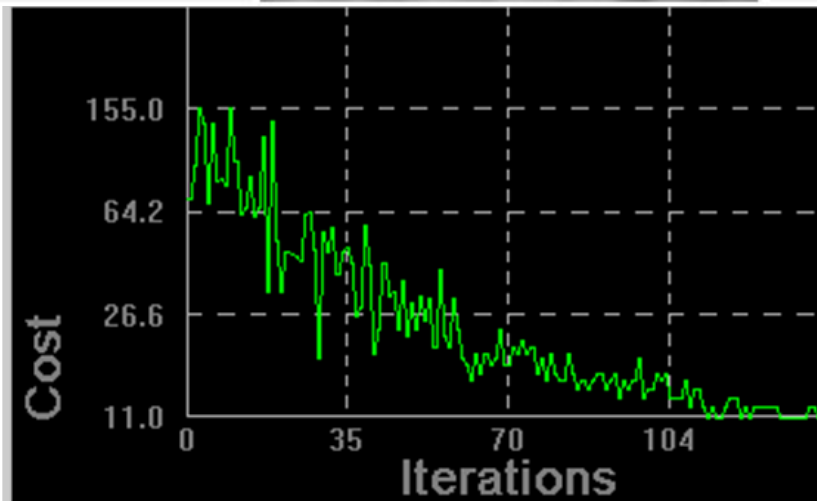


*Średni kształt modelu
prawej nerki*

Wpasowanie modelu prawej nerki



	Model
Przed dopasowaniem	
	P1 4.19637
	P2 -0.170415
	P3 0.969333
Po dopasowaniu	
	P4 0.101694
	P5 -5.51414
	P6 0.918305
	P7 -1.03355
	P8 0.243



koszt=11

Ilość iteracji = 139

Czas: poniżej sekundy

Wpasowanie lewej nerki

Metoda poziomic

- Na podstawie wartości prędkości punktów można konstruować dopasowywany kontur obiektu $\mathcal{K}(t)$ w kolejnych chwilach czasowych na podstawie oszacowań prędkości punktów węzłowych konturu $v(x_{\mathcal{K}}, y_{\mathcal{K}}, t)$

- Wtedy całościowy opis ruchu konturu w postaci

$$\mathcal{K}(t) = v(x_{\mathcal{K}}, y_{\mathcal{K}}, t) \cdot \vec{N}$$

- Metoda śledząca w czasie kształt konturu obiektu $\mathcal{K}(\mathbf{p}, t)$, opisanego wektorem parametrów \mathbf{p} , za pomocą powierzchni (ogólnie hiperpowierzchni dopuszczając wielowymiarowość dziedziny obrazów) postaci $\mathcal{S}(x, y, t) : \mathbb{R}^2 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$

jako

$$\mathcal{K}(\mathbf{p}, t) = \{(x, y) | \mathcal{S}(x, y, t) = 0\}$$

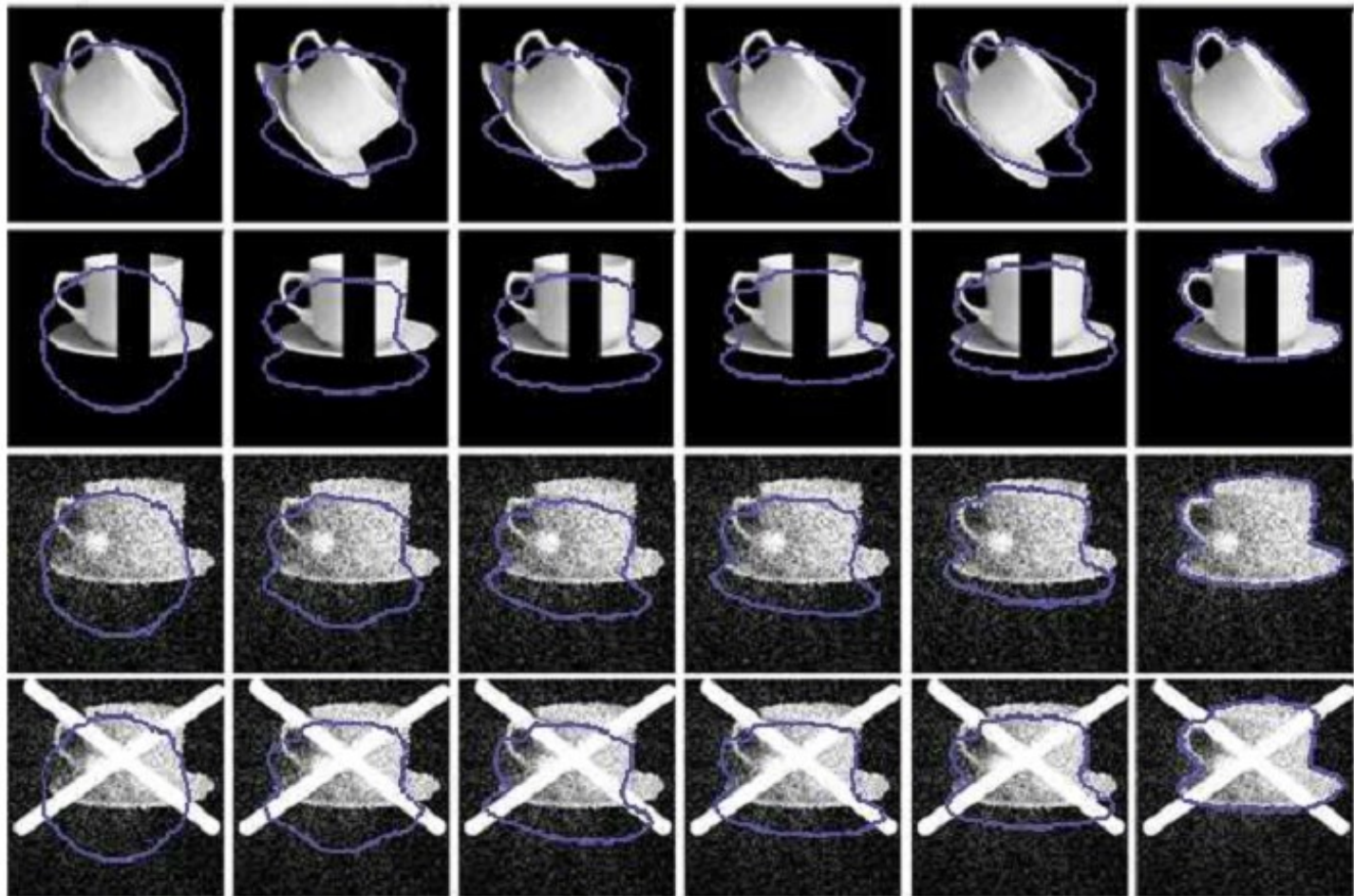
początkowa postać konturu $\mathcal{K}(\mathbf{p}, 0) = \{(x, y) | \mathcal{S}(x, y, 0) = 0\}$

- Hiperpowierzchnia $\mathcal{S}(x, y, t)$ może powstać na bazie czasowego rozkładu prędkości realnych punktów obrazu, zaś procedura wyznaczenia postaci konturu optymalnie wpasowanego w realne obiekty obrazów polega na zróżniczkowaniu po czasie modelu $\mathcal{S}(x, y, t)$ (liczeniu czasowych gradientów) pozwalających ustalić iterowany ruch punktów konturu

$$\mathcal{S}(\mathcal{K}(t), t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \mathcal{K}} \cdot \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = 0$$

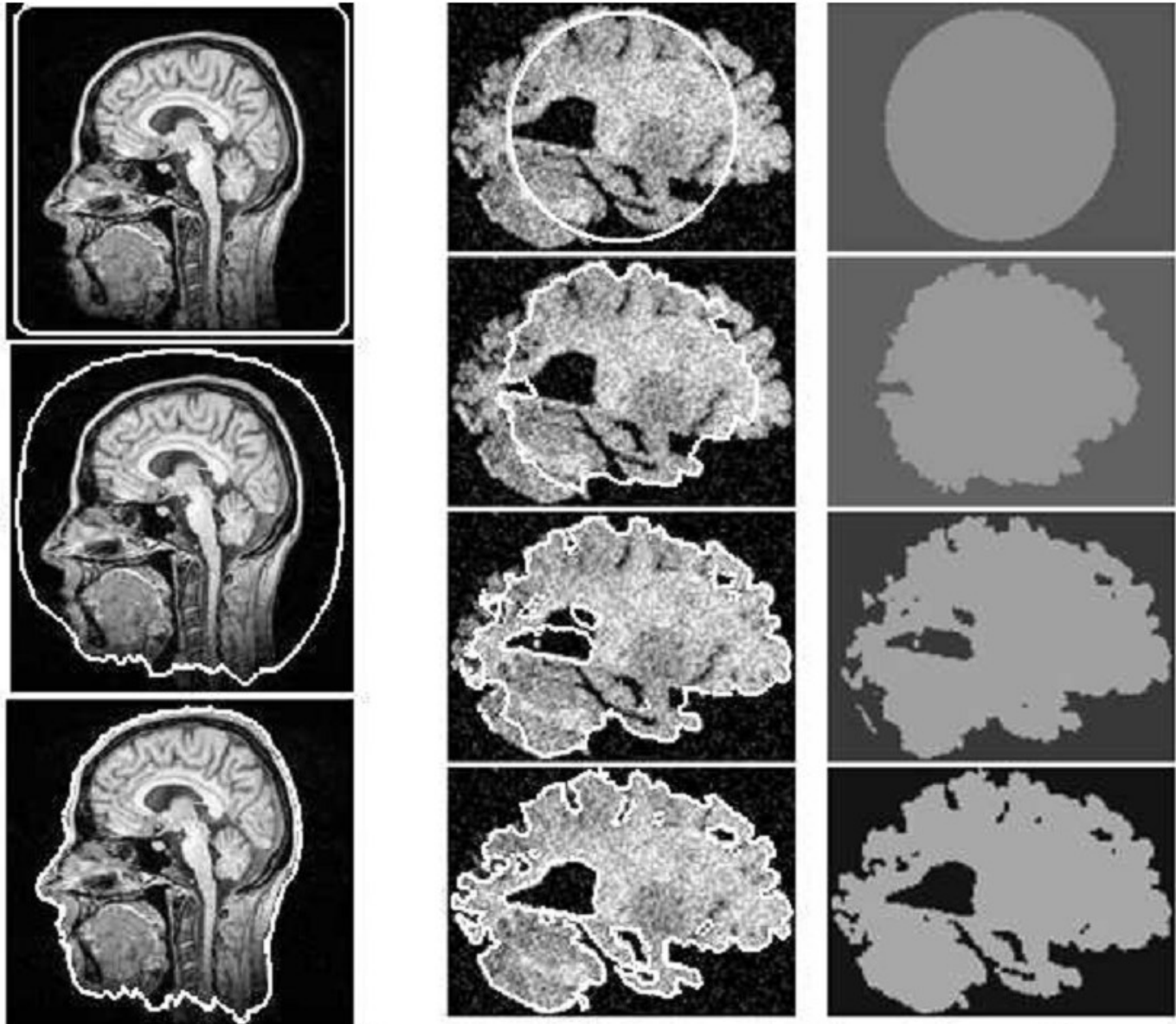
- W kolejnych krokach (wartościach t) modyfikowany jest kształt konturu, zmianie ulega także postać hiperpowierzchni

Przykłady działania metody poziomic

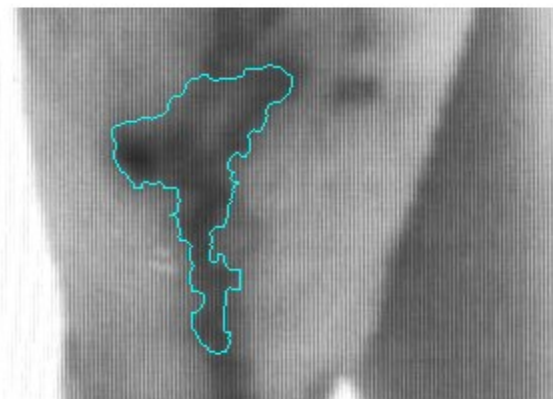
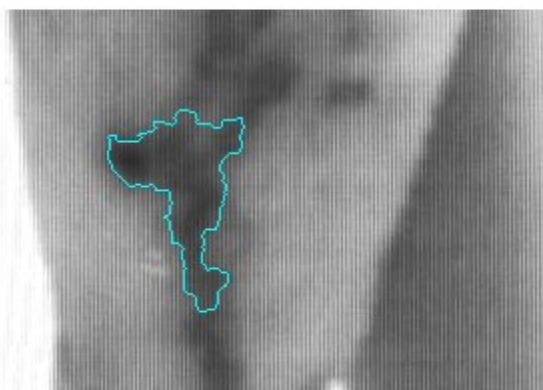
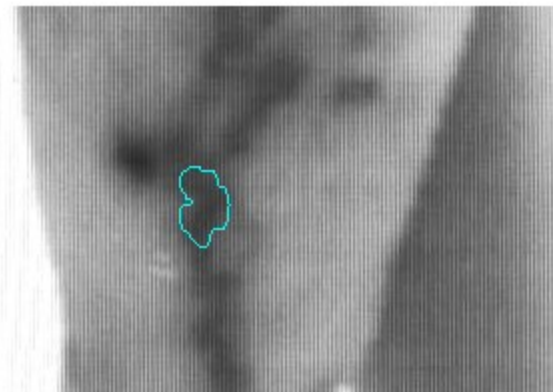
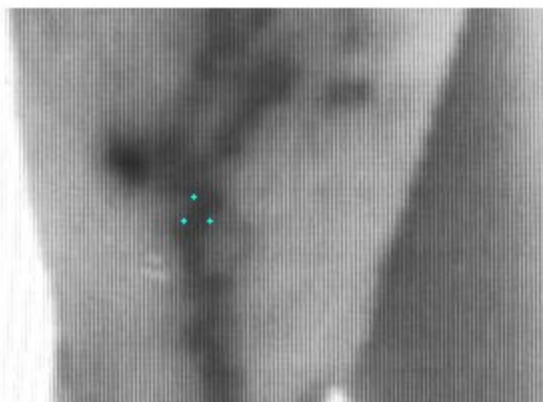
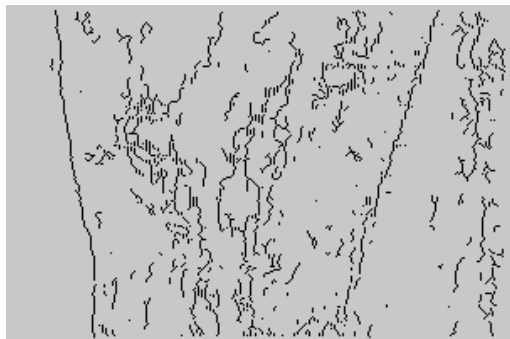


[http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~boiman/reading/level sets/levelset tutorial.ppt](http://www.wisdom.weizmann.ac.il/~boiman/reading/level%20sets/levelset%20tutorial.ppt)

Przykłady działania metody poziomic

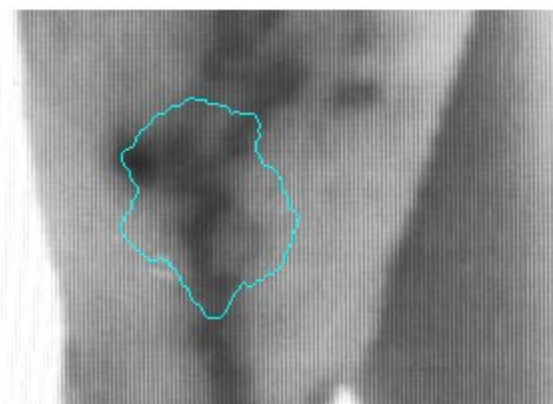
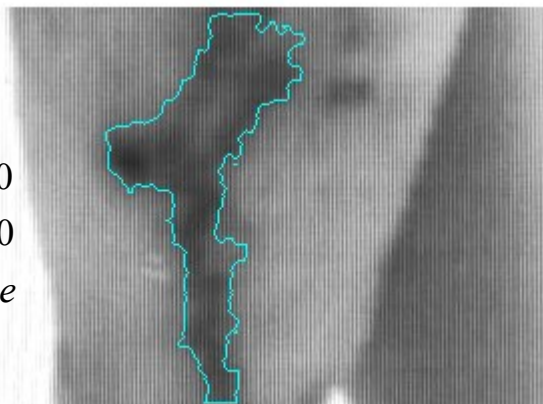


Mapy krawędzi (kierunek i wartość gradientu)



$$\vec{v} = (a_1 - a_2c) / g(\vec{M})$$

$$g(\vec{M}) = \begin{cases} 1 + |\vec{M}| & \text{if } \cos \theta \geq 0 \\ 1 + |\vec{M}|^2 & \text{if } -0.5 \leq \cos \theta < 0 \\ 1 + (3 \sim 5) |\vec{M}|^2 & \text{otherwise} \end{cases}$$



Analiza fraktalna (podobna koncepcja)



Oryginał oraz synteza fraktalna

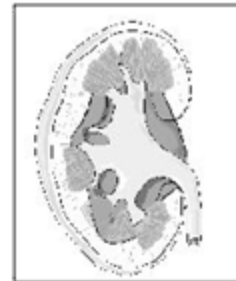
wymiar fraktalny: $D = \log_s N$



(a)



(b)



(c)

Naturalnie występujące fraktale w ludzkim ciele: (a) mózg, (b) płuca, (c) nerka

Statystyczne modele informacji obrazowej

- Zmienna losowa X – proces (łańcuch) losowy (X_t, t) – pole losowe i szereg czasowy
- Modelowanie pikseli i kontekstów: modele z pamięcią (Markowa)
- Model obrazu: mieszanina regionów (pól) niezależnych

Zmienna losowa to dowolna funkcja o wartościach rzeczywistych określona na zbiorze zdarzeń elementarnych

Proces losowy, inaczej funkcja losowa, to funkcja, której wartości leżą w przestrzeni definiowanej przez szereg zmiennych losowych. Inaczej to rodzina zmiennych losowych (X_t, t) , gdzie t przebiega pewien przedział dziedziny. Jeśli jest to przedział czasowy – proces nazywamy szeregiem czasowym, jeśli zaś obszar przestrzeni – proces nazywamy polem losowym.

Łańcuch losowy to proces losowy zdefiniowany na dyskretnej przestrzeni stanów (wartości zmiennych losowych rodziny).

Łańcuch (model) Markowa

- skończone łańcuchy losowe działające w czasie dyskretnym
- niepusty zbiór stanów odnosi się do naturalnego alfabetu zdarzeń i zależy od wielkości kontekstu modelu

$$A_C = \{\mathbf{b}_i\}_{i=1,\dots,K}$$

- wyjście stanów jest zdeterminowane (alfabet obserwacji)

$$A_O = \{a_j\}_{j=1,\dots,N}$$

- łańcuch Markowa rzędu m (wymiar wektora kontekstu \mathbf{b})

$$p_{i,j} = P(q_t = a_j \mid q_{t-1,t-2,t-m})$$

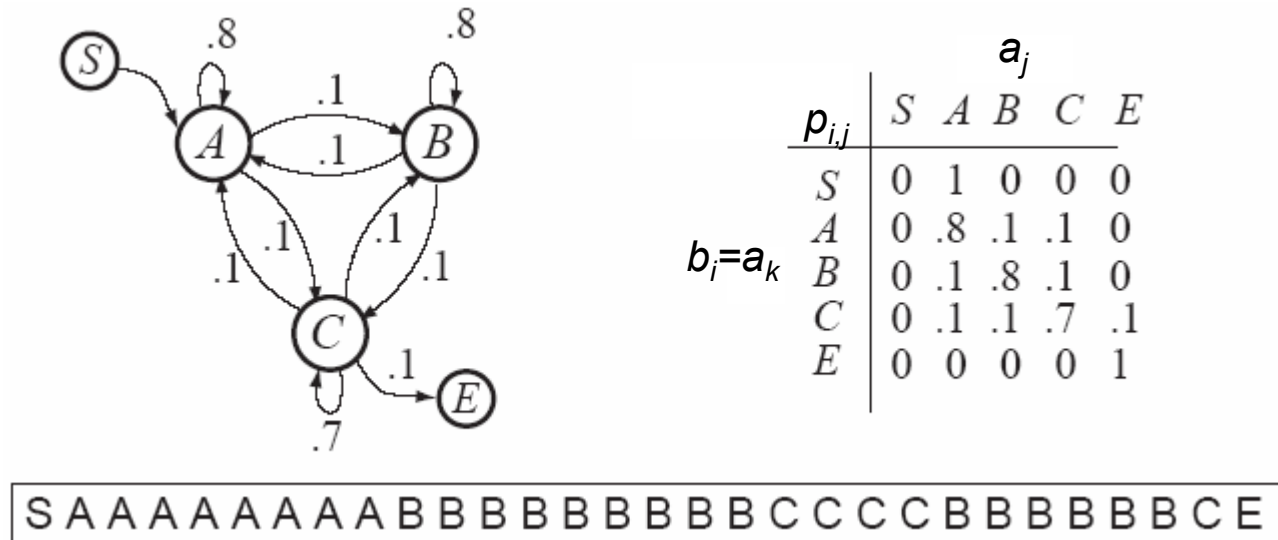
$$\text{gdzie } q_{t-1,t-2,t-m} = (a_{i_1}, \dots, a_{i_m}) = \mathbf{b}_i$$

definiowany przez macierz przejść:

$$M = (p_{i,j})_{\mathbf{b}_i \in A_C, a_j \in A_O}, \quad \sum_{a_j \in A_O} p_{i,j} = 1 \quad \forall i$$

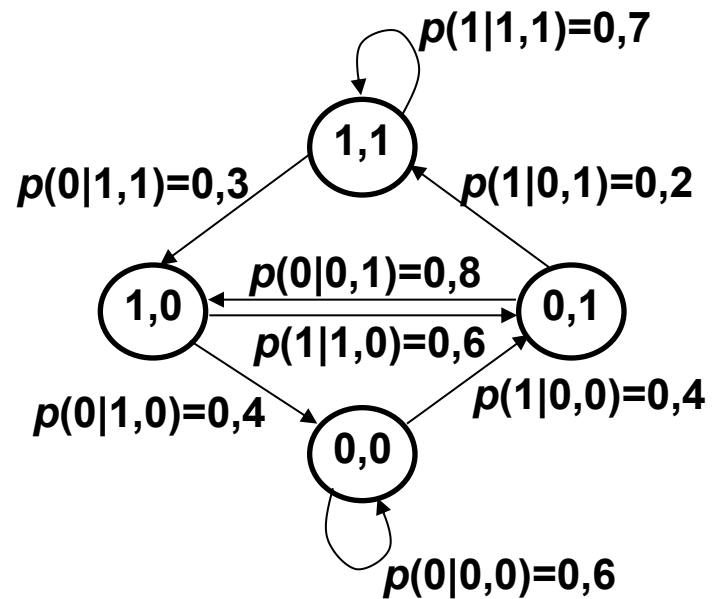
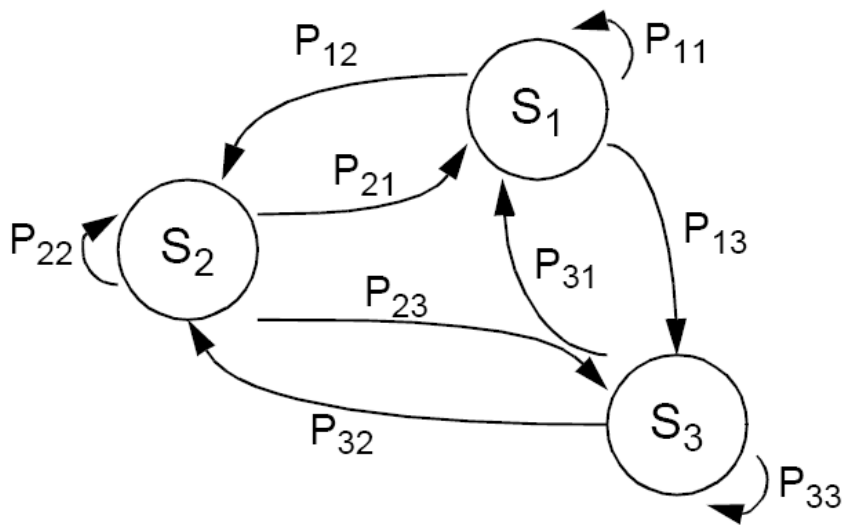
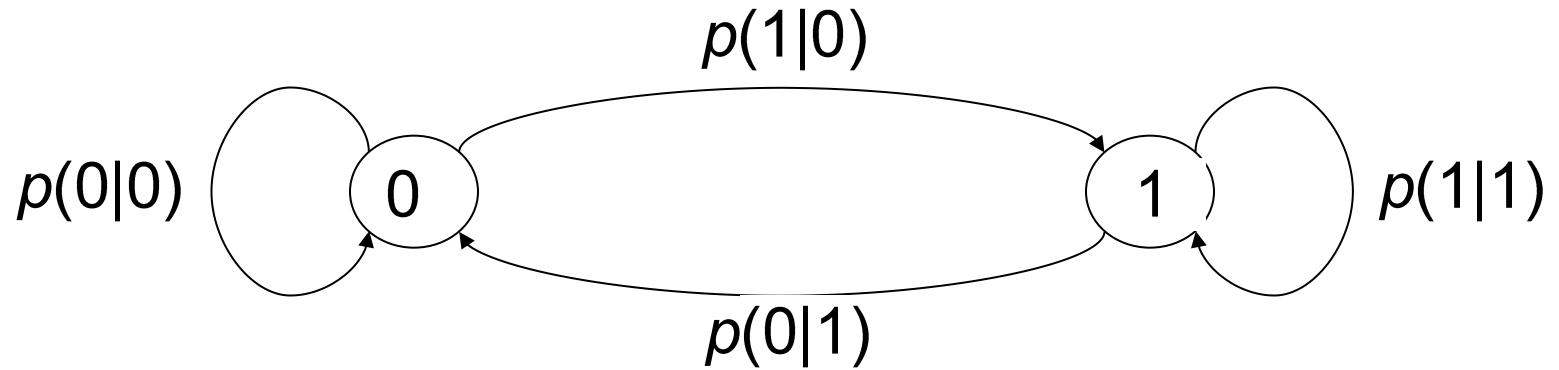
Model Markowa

- następny stan zależy od obecnego, model ma zdeterminowane wyjście, nie zależy od t
- przykład modelu rzędu 1 z alfabetem $\{A,B,C\}$



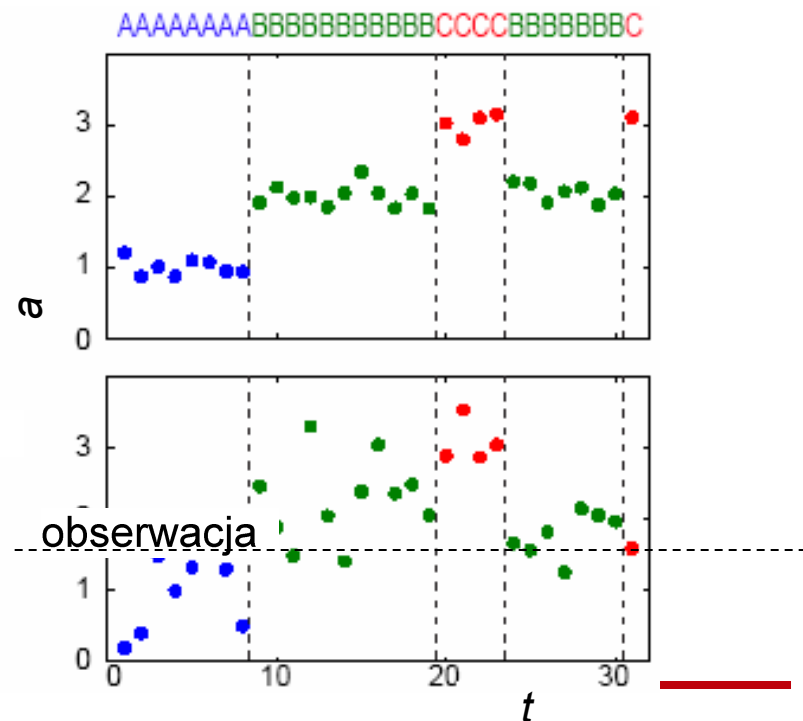
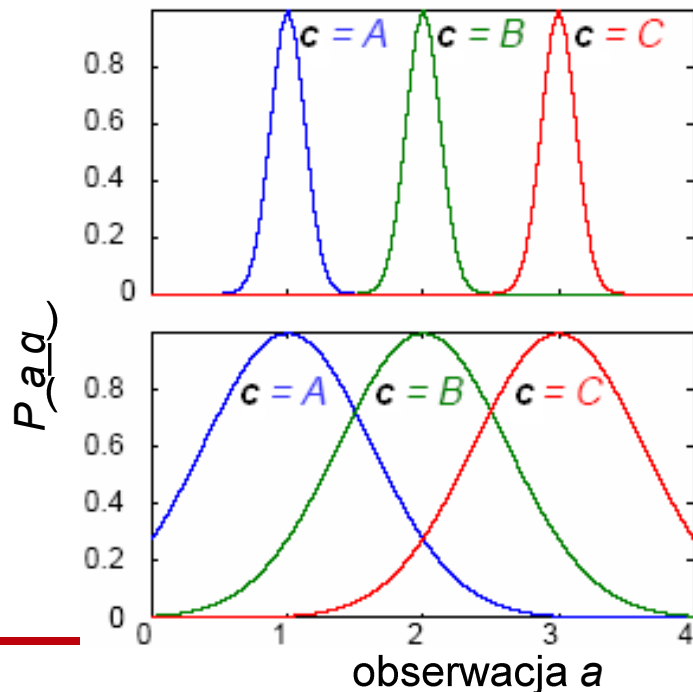
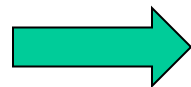
- skończona liczba stanów zależy od rzędu modelu i rozmiaru alfabetu A_0

Przykłady modelu Markowa



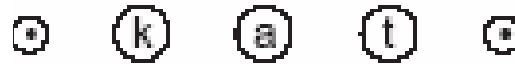
Ukryte modele Markowa (HMM)

- Proces losowy jest **ukryty**, ale może być obserwowany za pomocą **zbioru procesów losowych** generujących ciąg obserwacji
- Przechodzimy od analizy zależności sąsiednich zdarzeń procesu do analizy wpływu kilku czynników (procesów losowych) na obserwacje w kolejnych chwilach czasowych
- Cały układ emituje symbole, a nie jeden stan: trzeba dopasować przejścia między stanami do ciągu obserwacji (zwiększamy wymiarowość modelu)

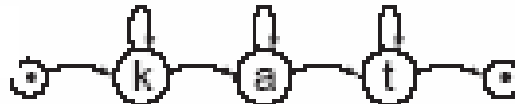


Ukryte modele Markowa (HMM)

- stany $q_t \in A_Q$ oraz alfabet obserwacji A_O

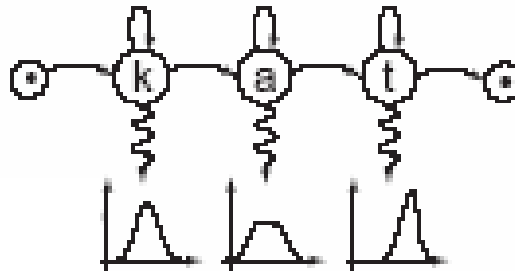


- prawdopodobieństwa przejść $p_{i,j}$



	k	a	t	*
*	1.0	0.0	0.0	0.0
k	0.9	0.1	0.0	0.0
a	0.0	0.9	0.1	0.0
t	0.0	0.0	0.9	0.1

- rozkłady emisji $p_i(a|q_t)$



- stan początkowy q_0

a – obserwacje, q - stany

Wyznaczanie HMM

- Prawdopodobieństwo wystąpienia ciągu n obserwacji $\mathbf{a} \in A_O^+$ przy sekwencji stanów $\mathbf{q} \in A_Q^+$ jest następujące:

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{q}) = \prod_{t=0}^{n-1} p_{\mathbf{q}(t+1)}(\mathbf{a}(t+1)) p_{\mathbf{q}(t), \mathbf{q}(t+1)}$$

- Modelowanie polega na doborze \mathbf{q} pozwalającej uzyskać maksimum $P(\mathbf{a}, \mathbf{q})$

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{q}^*) = \max_{\mathbf{q} \in A_Q^+} \{P(\mathbf{a}, \mathbf{q}) \mid \mathbf{a} \in A_O^+, |\mathbf{a}| = |\mathbf{q}|\}$$

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{q}^*) = \max_{\mathbf{q} \in A_Q^+} \{P(\mathbf{a}, \mathbf{q}) \mid \mathbf{a} \in A_O^+, |\mathbf{a}| = |\mathbf{q}|\}$$

Algorytm Viterbiego

- Prawdopodobieństwo (miara ilościowa) optymalnej drogi kończącej się w stanie q_k

$$P(t, k) = \max_{\mathbf{q} \in A_Q^+} \{P(a[1..t], \mathbf{q}) \mid \mathbf{q}(t) = q_k\}$$

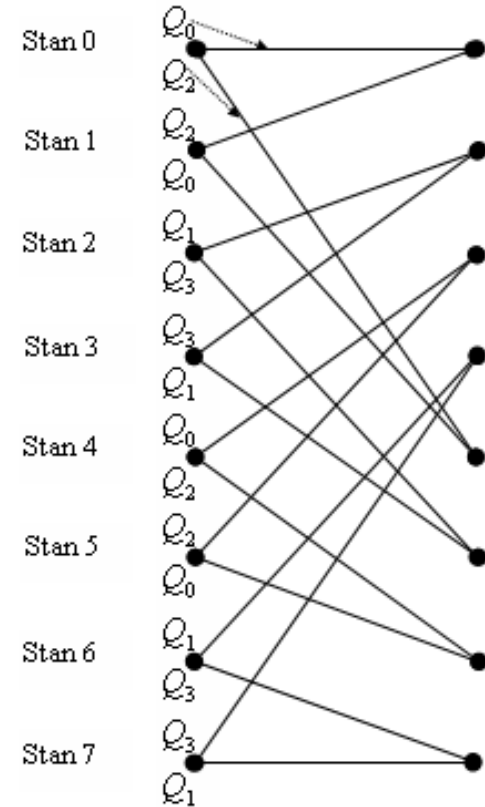
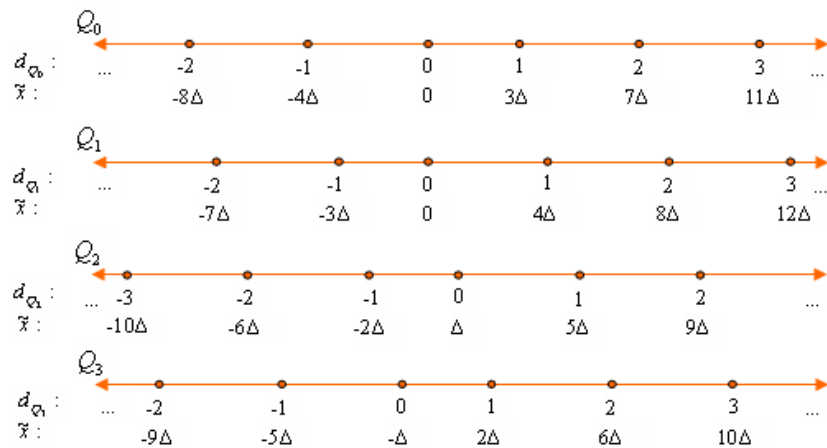
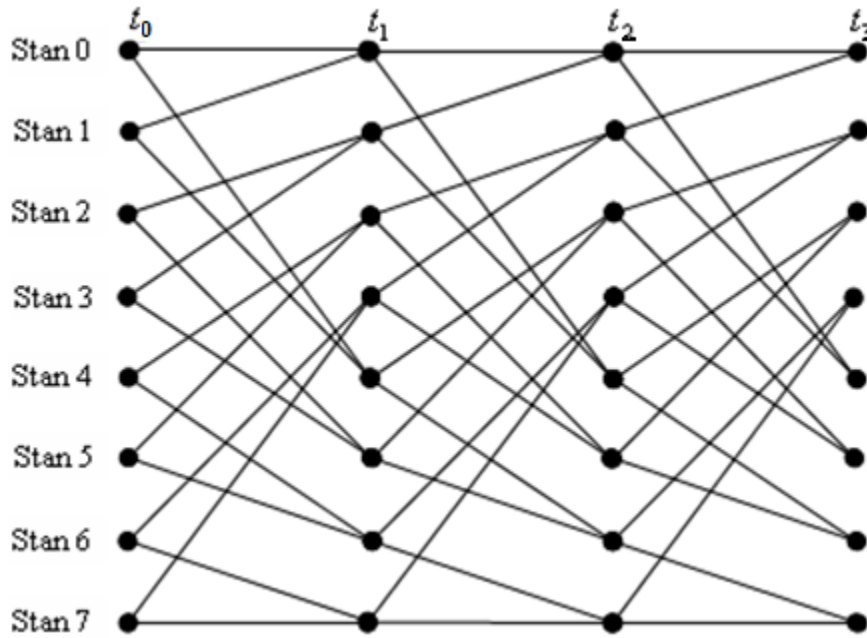
- Zachodzi, gdy rozpisując

$$P(t, k) = p_k(a(t)) \max_{q_l \in A_Q} \{P(t-1, l) p_{l,k}\}$$

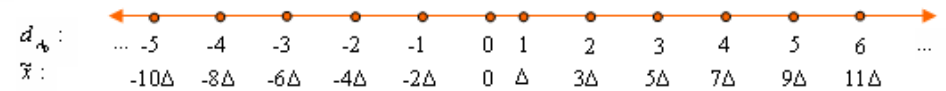
- Wówczas

$$P(\mathbf{a}, \mathbf{q}^*) = \max_{q_k \in A_Q} \{P(\mathbf{a}, k)\}$$

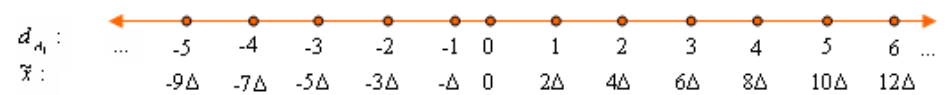
Przykład modelowania HMM (alg. Viterbiego)



$$A_0 = Q_0 \cup Q_2$$

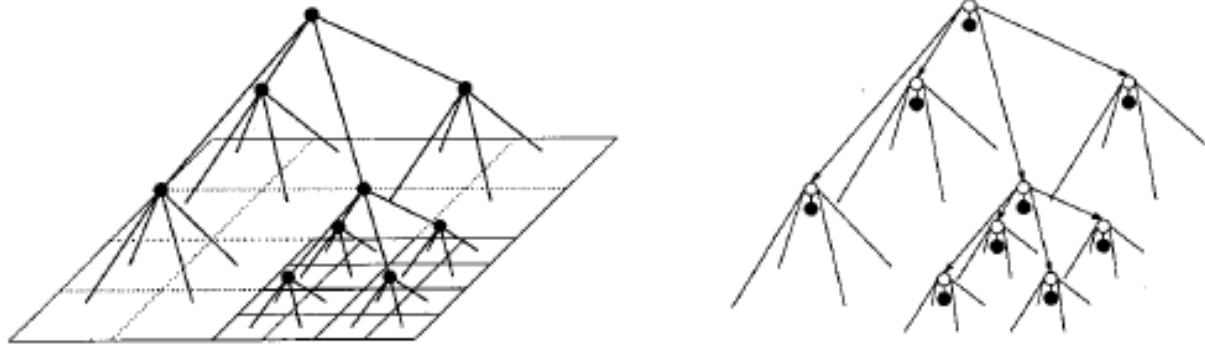


$$A_1 = Q_1 \cup Q_3$$



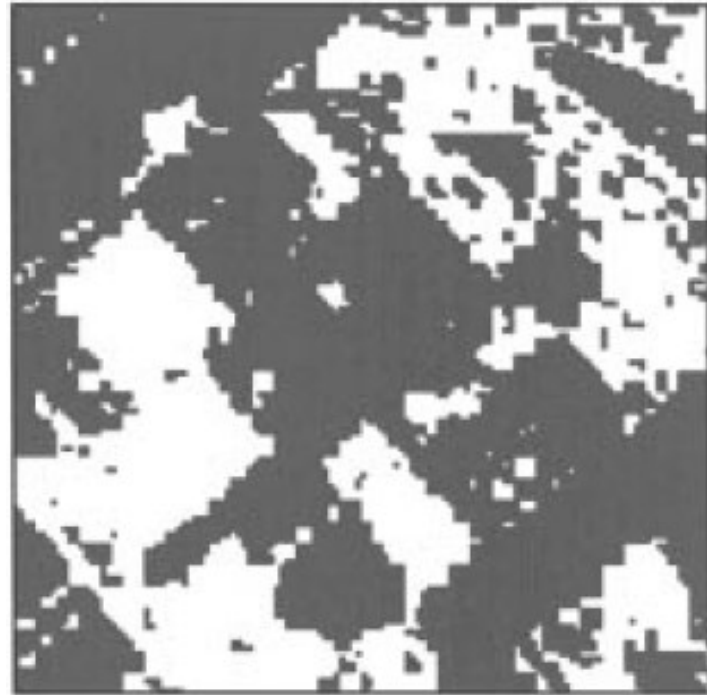
Algorytm modelowania HMM

- Analiza danych treningowych
- Wybór modeli HMM
- Pasowanie modeli do danych
- Optymalizacja parametrów modeli (Viterbi, rozkłady, EM, etc)



przykład ukrytego drzewa Markowa

Przykłady z HMM



przykład segmentacji obrazu

Modelowanie pikseli (skończona mieszanka regionów)

Dany jest obraz X o wymiarach $M \times N$ oraz K regionach R_k .
Skończona mieszanka regionów opisująca obraz przyjmuje postać:

$$P(x_i) = \sum_{k=1}^K \pi_k P_k(x_i), \quad i = 1, \dots, M \cdot N$$

$$\sum_{k=1}^K \pi_k = 1, \quad P_k(x_i) = P(x_i | R_k)$$

Modelując rozkłady warunkowe ogólnie (uogólnionym rozkładem Gaussa) mamy następującą postać fgp:

$$P_k(x_i) = \frac{\alpha \beta_k}{2\Gamma(1/\alpha)} \exp\left[-|\beta_k(x_i - \mu_k)|^\alpha\right], \quad \alpha > 0, \quad \beta_k = \frac{1}{\sigma_k} \left[\frac{\Gamma(3/\alpha)}{\Gamma(1/\alpha)} \right]^{1/2}$$

z parametrem α

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} u^{x-1} e^{-u} du$$

Model mieszaniny Gaussów (FGMM)

Często stosowany model z rozkładem Gaussa (normalnym):

$$P(x_i) = \sum_{k=1}^K \pi_k g_k(x_i), \quad i = 1, \dots, M \cdot N$$

$$g_k(x_i) = g(x_i | \mu_k, \sigma_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \exp\left(-\frac{(x_i - \mu_k)^2}{2\sigma_k^2}\right)$$

Model całego obrazu (iid)

Obraz jest modelowany za pomocą pola losowego \mathbf{X} , statystycznie niezależnego o jednakowym rozkładzie:

$$P(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{MN} \sum_{k=1}^K \pi_k P_k(x_i), \quad i = 1, \dots, M \cdot N$$

$$\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_{MN}], \quad \mathbf{x} \in \mathbf{X}$$

Obraz X jest konkretną realizacją pola \mathbf{X}

Określenie modelu

Określenie modelu polega na ustaleniu wartości:

- parametrów ogólnych (globalnych, strukturalnych):

$$(K, \alpha)$$

- lokalnych parametrów w regionach:

$$(\pi_k, \mu_k, \sigma_k, k = 1, \dots, K)$$

Kryterium: maksymalizacja funkcji wiarygodności modelu lub, równoważnie, minimalizacja względnej entropii (odległości) pomiędzy:

histogram obrazu (**UPROSZCZENIE!**)

$$P_F(f)$$

oraz

$$P_X(f)$$

histogram z modelu

Minimalizacja entropii modelu aproksymacji

Ogólna entropia względna (odległość Kullbacka-Leiblera (K-L)):

$$H(P_F \parallel P_X) = \sum_f P_F(f) \log \frac{P_F(f)}{P_X(f)}$$

Jest to odległość (różnica) informacji pomiędzy rozkładem rzeczywistym a uzyskanym z modelu

Do estymacji parametrów w regionach dla różnych α wykorzystuje się algorytm E-M

Algorytm E-M (expectation-maximization)

1. Dla $\alpha = \alpha_{\min}, \dots, \alpha_{\max}$ przy ustalonym K

- $m=0$
- Krok E: dla $i=1, \dots, MN$, $k=1, \dots, K$ oblicz

$$z_{i,k}^{(m)} = \frac{\pi_k^{(m)} P_k(x_i)}{\sum_{k=1}^K \pi_k^{(m)} P_k(x_i)}$$

- Krok M: dla $k=1, \dots, K$ uaktualnij parametry

$$\left\{ \begin{array}{l} \pi_k^{(m+1)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{MN} z_{i,k}^{(m)} \\ \mu_k^{(m+1)} = \frac{1}{N \pi_k^{(m+1)}} \sum_{i=1}^{MN} z_{i,k}^{(m)} x_i \\ (\sigma_k^2)^{(m+1)} = \frac{1}{N \pi_k^{(m+1)}} \sum_{i=1}^{MN} z_{i,k}^{(m)} (x_i - \mu_k^{(m+1)})^2 \end{array} \right.$$

- Jeśli $|H^{(m)}(P_F || P_X) - H^{(m+1)}(P_F || P_X)| \leq \epsilon$ skocz do p. 2; wpp $m=m+1$ i skocz do krok E

2. Oblicz ogólną entropię względną (odległość K-L) i skocz do p. 1

Kolejny krok: modelowanie z kontekstem (przynależność do regionów)

Określenie prawdopodobieństw przypisania do regionów z uwzględnieniem kontekstu:

$$\pi_k^{(i)} = P(x_i \in R_k | c_i) = \frac{\sum_{y \in c_i} I_{R_k}(y)}{|c_i|}$$

$$I_{R_k}(y) = \begin{cases} 1 & y \in R_k \\ 0 & \text{wpp} \end{cases}$$

$$P(\mathbf{x} | c) = \prod_{i=1}^{MN} \sum_{k=1}^K \pi_k^{(i)} P_k(x_i), \quad i = 1, \dots, M \cdot N$$

Określenie przynależności do regionów

1. Ustal $r_i^{(0)}$

$$r_i^{(0)} = \arg\{\max_k P_k(x_i)\}$$

2. Uaktualnij przynależności do regionów poszczególnych pikseli:

- Dla losowo wybranych pikseli $i=1, \dots, MN$
- Modyfikuj przynależność r_i

$$r_i^{(m)} = \arg\left\{\max_k \left[\left(\pi_k^{(i)} \right)^{(m)} P_k(x_i) \right]\right\}$$

3. Jeśli zmieni przynależność mniej niż 1% pikseli to stop; wpp $m=m+1$ i skocz do 2

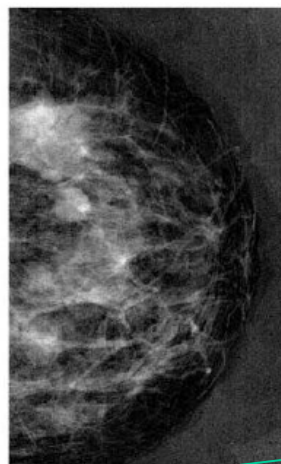
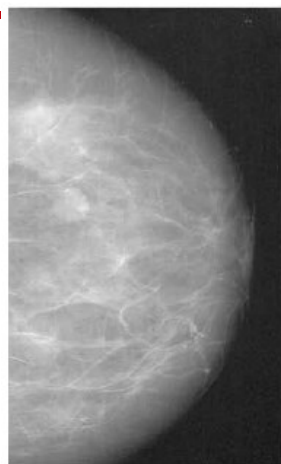
Kompleksowe modelowanie (analiza obrazu)

1. Dla $K=K_{\min}, \dots, K_{\max}$
 - wyznacz parametry regionów i α metodą E-M z jej adaptacyjną modyfikacją kontekstową
2. Ustal optymalną wartość K :

$$K_o = \arg \left\{ \min_K (-\log P(F | X) + \log n_{\text{param}}) \right\}$$

3. Ustal przynależność pikseli do regionów (modelowanie regionów z kontekstem)
-

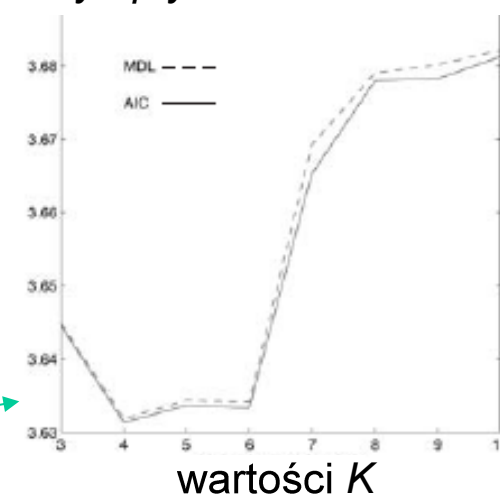
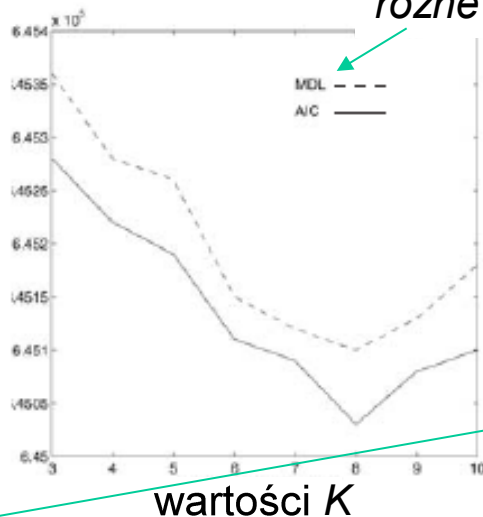
Dobór K i α (mammogramy)



oryginał

po wstępnym przetworzeniu

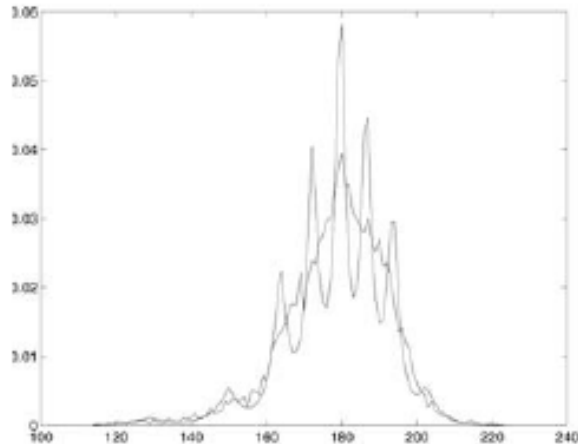
różne miary optymalności modelu



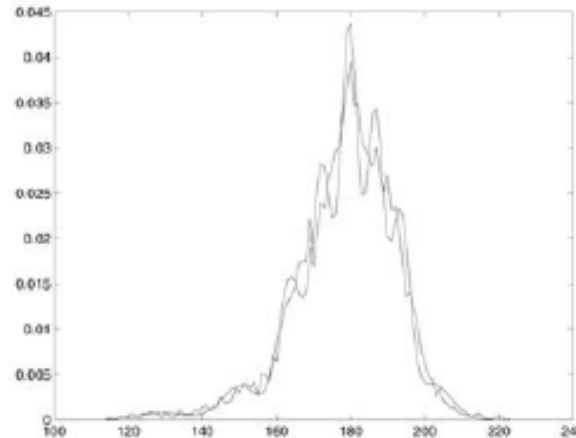
K	$\alpha = 1.0$	$\alpha = 2.0$	$\alpha = 3.0$	$\alpha = 4.0$
2	651250	650570	650600	650630
3	646220	644770	645280	646200
4	645760	644720	645260	646060
5	645760	644700	645120	646040
6	645740	644670	645110	645990
7	645640	644600	645090	645900
8	645550(min)	644570(min)	645030(min)	645850(min)
9	645580	644590	645080	645880
10	645620	644600	645100	645910

	Metoda		
	manualna	klasyfikator Bayesa	mieszana regionów
entropia względna	0.0067	0.4406	0.1578

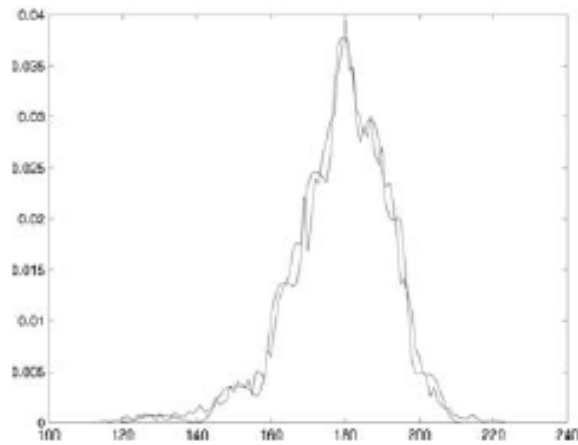
Dopasowanie do histogramu



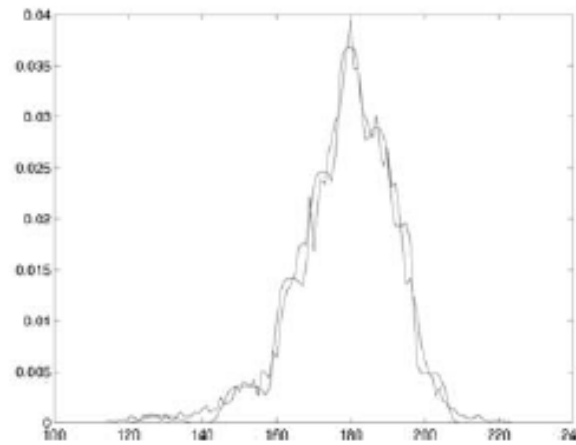
$$\alpha = 1, H(P_F \parallel P_X) = 0,0783$$



$$\alpha = 2, H(P_F \parallel P_X) = 0,0369$$

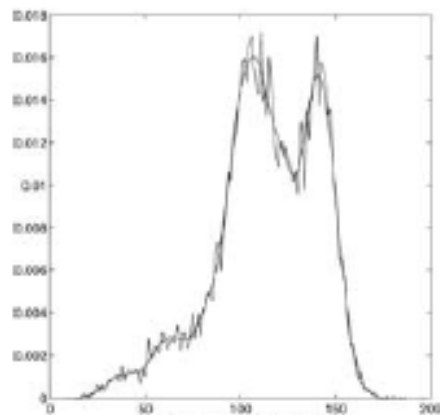
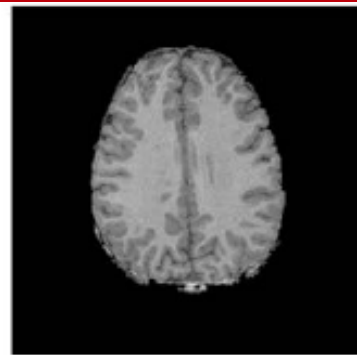
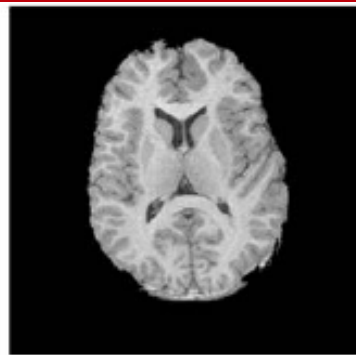
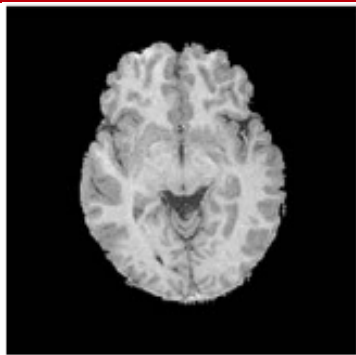


$$\alpha = 3, H(P_F \parallel P_X) = 0,0251$$

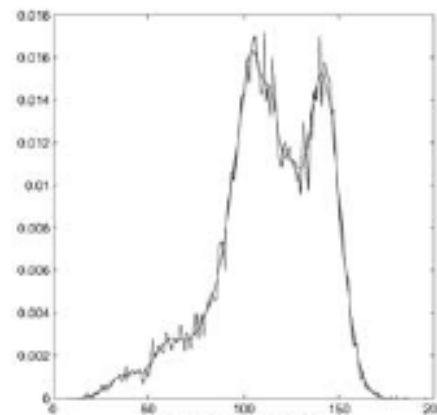


$$\alpha = 4, H(P_F \parallel P_X) = 0,0282$$

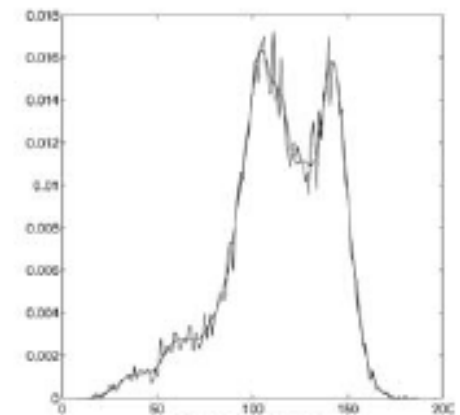
Efekty modelowania (MR)



$K=7$



$K=8$

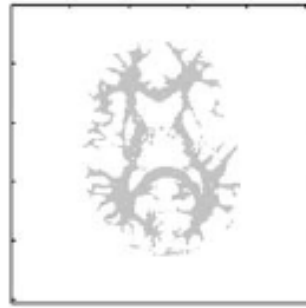
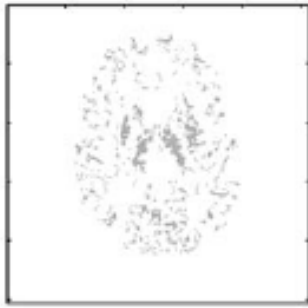
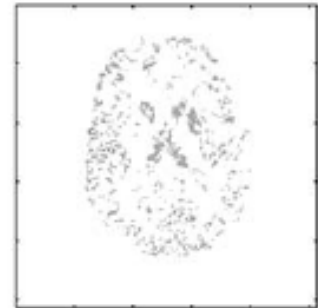
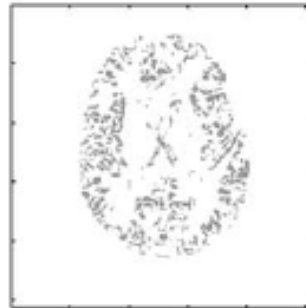
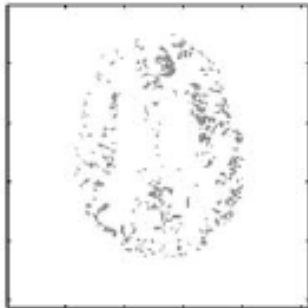
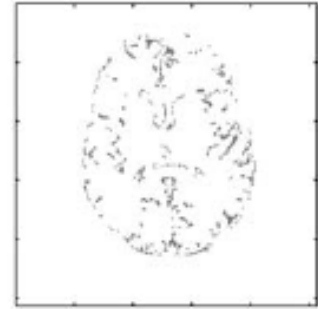
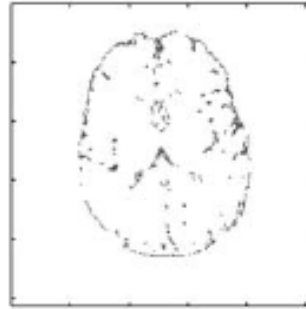
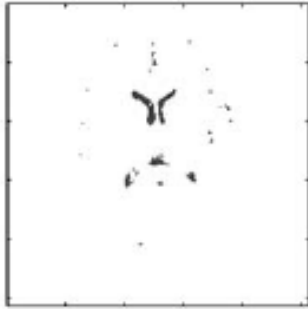


$K=9$

Parametry 8 regionów:

Tissue Type	1	2	3	4	5	6	7	8
π	0.0251	0.0373	0.0512	0.071	0.1046	0.1257	0.2098	0.3752
μ	38.848	58.718	74.400	88.500	97.864	105.706	116.642	140.294
σ^2	78.5747	42.282	56.5608	34.362	24.1167	23.8848	49.7323	96.7227

Regiony



Wyniki modelowania

