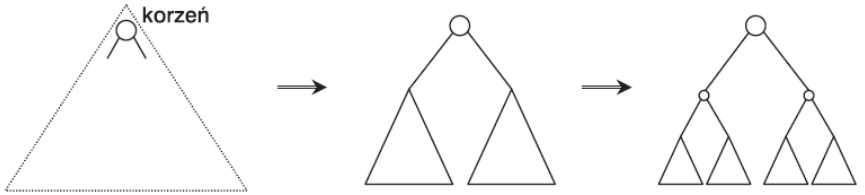
KODY SYMBOLI

KODOWANIE DANYCH, A.Przelaskowski

- Metoda S-F
- Kod Huffmana
- Adaptacyjne drzewo Huffmana
- Problemy implementacji
- Kod Golomba
- Podsumowanie

Kod Shannona-Fano

- Kod drzewa binarnego
- Na wejściu rozkład: $P_S=\{p_1,\ldots,p_n\}$
- Dzielimy na podgrupy o zbliżonym prawdopodobieństwie
- Interpretacja: konstrukcja drzewa od góry



Algorytm S-F

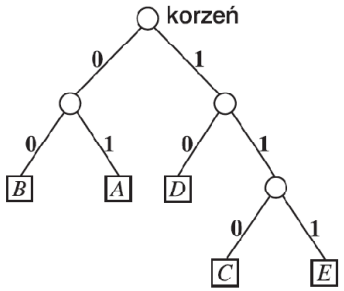
1. Określ wagi symboli
2. Uszereguj symbole w nierosnącym porządku wag (grupa początkowa)
3. Podziel grupę symboli na dwie części o możliwie równej sumie wag symboli, z zachowaniem porządku listy (tj. jedna podgrupa obejmuje częściej występujące symbole, druga – mniej prawdopodobne).
4. Przyporządkuj symbolom z jednej podgrupy binarne 0, a symbolom z drugiej – 1.
5. Rekursywnie powtórz kroki 3 i 4 dla utworzonych przez ostatni podział podgrup o przynajmniej dwóch symbolach
6. Przypisz kolejnym symbolom z listy słowa kodowe, składające się z bitów kolejno przyporządkowanych grupom, do których trafiał dany symbol w kolejnych podziałach

Przykład S-F

Procedura podziałów:

Symbol	Waga	Podziały		
„B”	12	0	0	
„A”	6	0	1	
„D”	5	1	0	
„C”	4	1	1	0
„E”	4	1	1	1

Efekt:



„A” → 01
„B” → 00
„C” → 110
„D” → 10
„E” → 111

Efektywność S-F w przykładzie

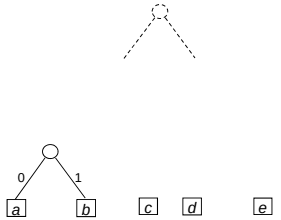
Symbol a_i	$P(a_i)$	$I(a_i) = -\log_2 P(a_i)$ [bity/symbol]	$N(a_i) \cdot I(a_i)$ [bity]	$\lvert\varsigma_i\rvert$ [bity]	$N(a_i) \cdot \lvert\varsigma_i\rvert$ [bity]
„A”	6/31	2,369	14,215	2	12
„B”	12/31	1,369	16,431	2	24
„C”	4/31	2,954	11,817	3	12
„D”	5/31	2,632	13,161	2	10
„E”	4/31	2,954	11,817	3	12
Suma	–	–	67,441	–	70

$H(S_{DMS}) = 2,176$ wobec $L_{S\text{-}F} = \Sigma_i P(a_i) \cdot |\varsigma_i| = 2,258$

S-F stosowana *w WinZip* i produkcie firmy Microsoft: *Cabarc*

Optymalny Kod Symboli

- Metoda: budowa drzewa binarnego od dołu

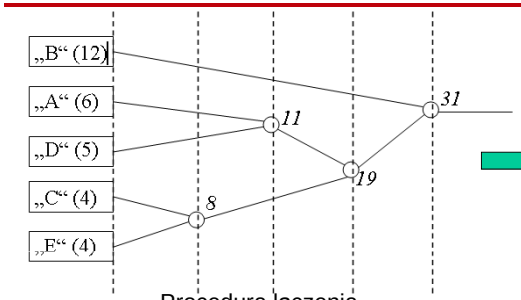


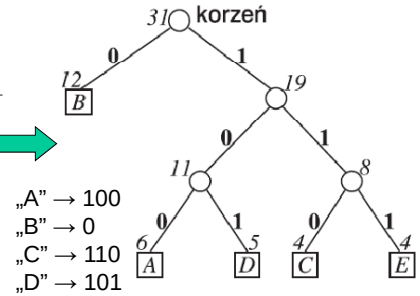
- **Optymalne drzewo binarne kodu symboli**
  - liść symbolu o najmniejszej wadze ma najdłuższe słowo, czyli leży najgłębiej w drzewie
  - liść symbolu o drugiej w kolejności najmniejszej wadze ma także najdłuższe słowo (lokalnie pełne drzewo binarne)

Algorytm Huffmana (optymalny)

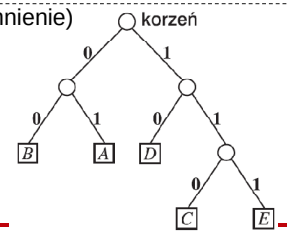
1. Określ wagi symboli; symbole wraz z wagami przypisz liściom – wolnym węzłom
2. Sortuj listę wierzchołków wolnych w nierosnącym porządku wag
3. Połącz dwa wolne wierzchołki z najmniejszymi wagami w nowe, większe poddrzewo
   - Przypisz gałęziom prowadzącym od rodzica do węzłów-dzieci etykiety: 0 i 1 (np. lewa gałąź – 0, prawa – 1)
4. Usuń z listy wierzchołków wolnych dwa połączone węzły i wpisz na tę listę nowy wierzchołek rodzica (o wadze równej sumie wag dzieci)
5. Powtarzaj kroki 3-4 aż do momentu, gdy na liście wierzchołków wolnych pozostanie tylko korzeń drzewa
6. Odczytaj ze struktury drzewa słowa kodowe kolejnych liści (symboli) - od korzenia do danego liścia

Przykład Huffmana





drzewo S-F (przypomnienie)



Efektywność kodu Huffmana

Symbol a_i	Oszacowane prawdopodobieństwo $P(a_i)$	Długość słowa kodowego $\|\varsigma_i\|$ [bity]	Długość sekwencji kodowej [bity]
„A”	6/31	3	18
„B”	12/31	1	12
„C”	4/31	3	12
„D”	5/31	3	15
„E”	4/31	3	12
Suma	–	–	69

efektywność S-F (przypomnienie)

Symbol a_i	$P(a_i)$	$I(a_i) = -\log_2 P(a_i)$ [bity/symbol]	$N(a_i) \cdot I(a_i)$ [bity]	$\|\varsigma_i\|$ [bity]	$N(a_i) \cdot \|\varsigma_i\|$ [bity]
„A”	6/31	2,369	14,215	2	12
„B”	12/31	1,369	16,431	2	24
„C”	4/31	2,954	11,817	3	12
„D”	5/31	2,632	13,161	2	10
„E”	4/31	2,954	11,817	3	12
Suma	–	–	67,441	–	70

$H(S_{DMS}) = 2,176$ wobec $L_{S\text{-}F} = \Sigma_i P(a_i) \cdot |\varsigma_i| = 2,258$ i $L_{huff} = 2,226$ (-1,5%)

Wersje kodu Huffmana

- Zastosowań jest wiele (JPEG, Deflate, uproszczenia niemal wszędzie)
- Ograniczenia (1 bit/symbol - wpływ długości ciągu kodowanego słowem)

Usprawnienia:

- Kod co celów transmisji
- Wykorzystanie heurystyk (charakterystyk a priori)
- Optymalizacja alfabetu (ograniczone modelowanie): łączenie z RLE w JPEG
- Kod adaptacyjny

Statyczne kodowanie Huffmana (JPEG)

klasyfikacja współczynników DC

Kategoria k	Zakres wartości różnicowej dla współczynnika DC	Długość słowa kodowego	Słowo kodowe
0	0	2	00
1	–1,1	3	010
2	–3,–2,2,3	3	011
3	–7,...,–4,4,...,7	3	100
4	–15,...,–8,8,...,15	3	101
5	–31,...,–16,16,...,31	3	110
6	–63,...,–32,32,...,63	4	1110
7	–127,...,–64,64,...,127	5	11110
8	–255,...,–128,128,...,255	6	111110
9	–511,...,–256,256,...,511	7	1111110
10	–1023,...,–512,512,...,1023	8	11111110
11	–2047,...,–1024,1024,...,2047	9	111111110

Przedrostek: słowo kategorii, przyrostek: kod dwójkowy k najmłodszych bitów wartości C (lub C-1 dla ujemnych)

1 → 010 1; -1 → 010 0; 40 → 1110 101000; -40 → 1110 010111

RLE plus Huffman

Kategoria(liczba bitów uzupełniającej części słowa kodowego)	Zakres wartości współczynnika AC
1	–1,1
2	–3,–2,2,3
3	–7,...,–4,4,...,7
4	–15,...,–8,8,...,15
5	–31,...,–16,16,...,31
6	–63,...,–32,32,...,63
7	–127,...,–64,64,...,127
8	–255,...,–128,128,...,255
9	–511,...,–256,256,...,511
10	–1023,...,–512,512,...,1023

klasyfikacja współczynników AC

..., niezerowy, 0, –3, 0, 0, 0, 1, –7, ...

↓

1/2, 3/1, 0/3

↓

111001 00, 111010 1, 100 000

Słowo RS (liczba poprzedzających zer/kategoria)	Długość słowa kodowego	Słowo kodowe
0/0 (EOB)	4	1010
0/1	2	00
0/2	2	01
0/3	3	100
...	...	...
0/8	10	1111110110
0/9	16	1111111100000101
0/A	16	1111111100000111
1/1	4	1100
1/2	6	111001
...	...	...
2/A	16	1111111100011101
3/1	6	111010
...	...	...
C/9	16	1111111111000001
C/A	16	1111111111000011
D/1	11	11111111000
...	...	...
F/0 (same zerowe współczynniki)	11	11111111001
F/1	16	1111111111101011
...	...	...
F/9	16	1111111111111011
F/A	16	1111111111111101

Adaptacyjny kod Huffmana

- Zmienna statystyka (w modelu przyczynowym na podstawie już zakodowanych danych)
- Aktualizacja statystyki po każdym zakodowanym symbolu
- Modyfikacja (korekcja) drzewa zamiast jego budowy

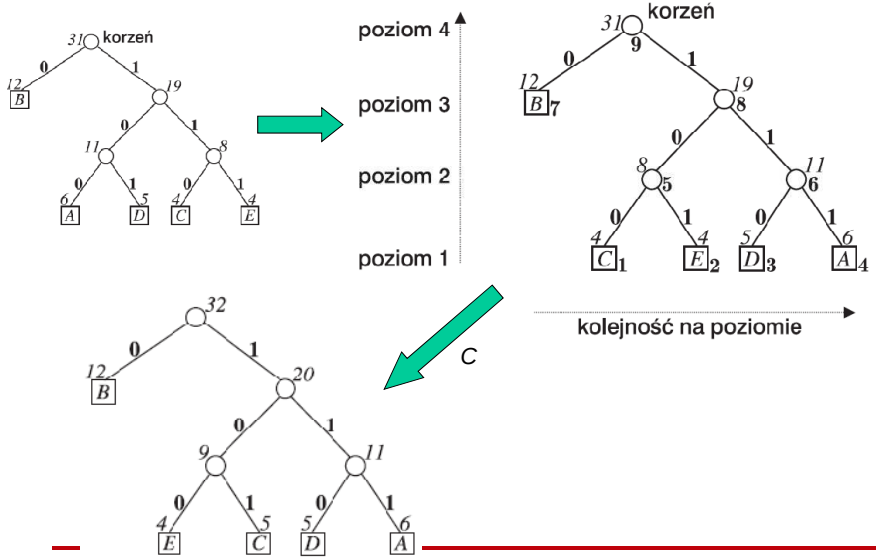
Problemy

- Przepełnienie drzewa
- Wprowadzenie nowych symbolu alfabetu (rozbudowa alfabetu)

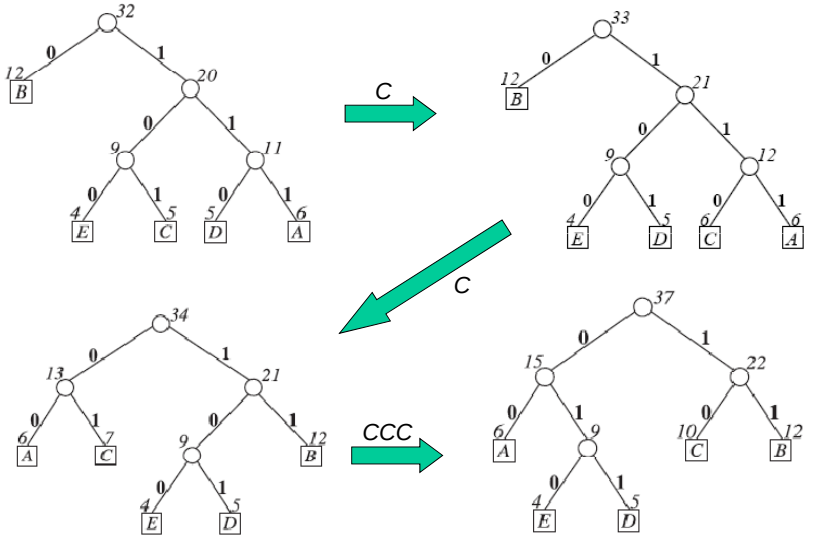
Adaptacyjny algorytm Huffmana

1. Inicjalizacja: początkowa postać drzewa Huffmana:
   a) wierzchołki są uszeregowane w porządku niemalejących wag na kolejnych poziomach (od dołu do korzenia, od lewej do prawej);
   b) każdemu wierzchołkowi jest przypisany numer porządkowy
2. Modyfikacja drzewa po kodowaniu symbolu *s* w strumieniu wejściowym:
   a) ustal numer *v* liścia, któremu w drzewie *T* przypisano symbol *s*: $v = T(s)$ oraz jego wagę w_v; jeśli $T(s) = 0$ dodaj nowy liść z symbolem *s* do drzewa:
      - na miejscu liścia o najmniejszej wadze (z numerem 1 na uporządkowanej liście) ustal węzeł wewnętrzny i dołącz do niego dwa węzły potomne:nowy liść z *s* i wagą 0 oraz liść o najmniejszej dotąd wadze;
      - zmodyfikuj listę wierzchołków ustalając numer nowego liścia jako $v = 1$, numer jego brata jako 2, a numer rodzica jako 3 zwiększając o 2 numery pozostałych węzłów;
   b) inkrementuj wagę wierzchołka *v*: $w_v \leftarrow w_v + 1$;
   c) zamiana wierzchołków: jeśli na liście wierzchołków za węzłem *v* występują węzły z wagą $w_v - 1$, to zamień miejscami *v* z ostatnim węzłem o tej wadze (wraz z poddrzewami);
   d) kontynuacja modyfikacji w górę drzewa aż do poziomu korzenia:
   ~~$v \leftarrow$ *rodzic*(*v*) i skok do p. 2b)~~

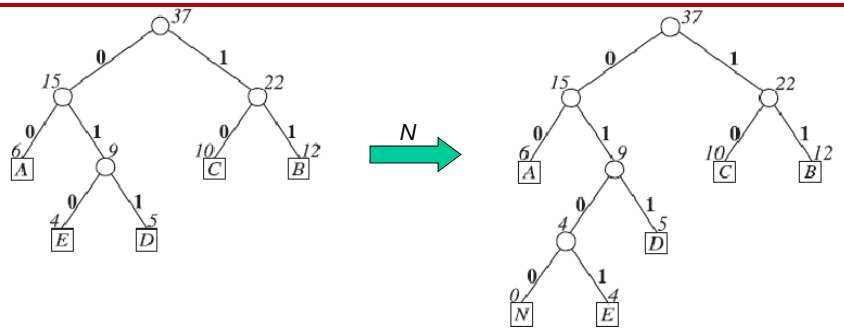
Przykład adaptacyjnej modyfikacji drzewa Huffmana



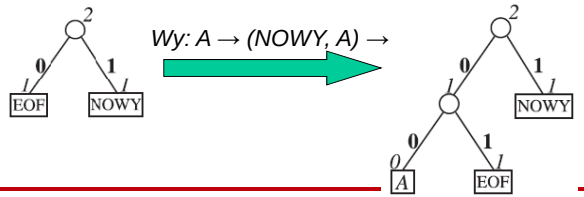
Adaptacyjna modyfikacja(2)



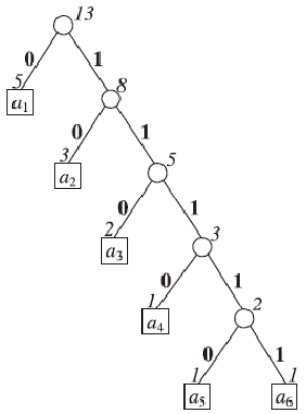
Dodanie nowego symbolu (inicjalizacja)



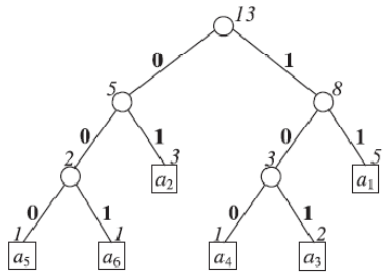
Inicjalizacja (pełna adaptacyjność)



Dobór postaci słów kodowych w drzewach Huffmana



równowartość w efektywności

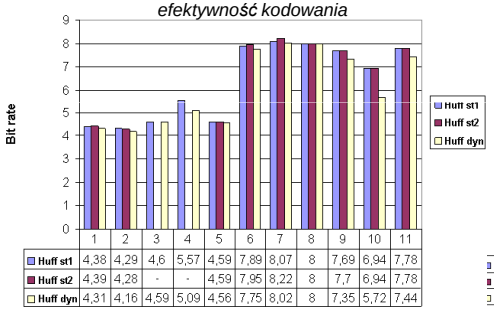


Łączymy węzeł z płytszym poddrzewem

Efektywność kodu Huffmana

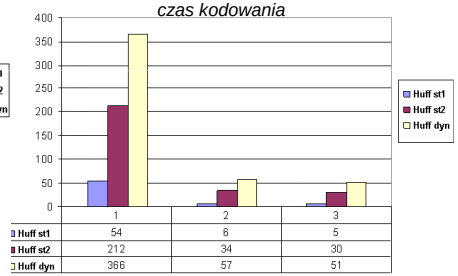
Koder	Zbiór Z1(10kB)	Z2(100kB)	Z3(4MB)	Średnio
Huffman statyczny	5,85	8,06	2,43	5,45
Huffman adaptacyjny	5,33	7,78	2,10	5,07
	+9%	+3,5%	+13,5%	+7%

efektywność kodowania



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Huff st1	4,38	4,29	4,6	5,57	4,59	7,89	8,07	8	7,69	6,94	7,78
Huff st2	4,39	4,28	-	-	4,59	7,95	8,22	8	7,7	6,94	7,78
Huff dyn	4,31	4,16	4,59	5,09	4,56	7,75	8,02	8	7,35	5,72	7,44

czas kodowania



	1	2	3
Huff st1	54	6	5
Huff st2	212	34	30
Huff dyn	366	57	51

- Znacząca poprawa efektywności metody adaptacyjnej
- Złożoność obliczeniowa jest większa o około 50-100%

Kod Golomba

- Kod dwójkowy prawie stałej długości
- Kod unarny
- Kod Golomba
- Efektywność kodu Golomba
- Kod Rice'a
- Przykład kodowania z JPEG-LS
- Testy efektywności

Kod dwójkowy prawie stałej długości

- $\hat{B}_n$ (dla n-elementowego alfabetu $A_S = \{a_0, \ldots, a_{n-1}\}$):
  - dla a_i , $0 \le i \le r-1$ mamy

$$\hat{B}_n(a_i) = B_{\lfloor \log_2 n \rfloor}(i)$$

  - dla a_i , $r \le i \le n-1$ mamy

$$\hat{B}_n(a_i) = B_{\lceil \log_2 n \rceil}(i+r)$$

  - gdzie

$$r = 2^{\lceil \log_2 n \rceil} - n$$

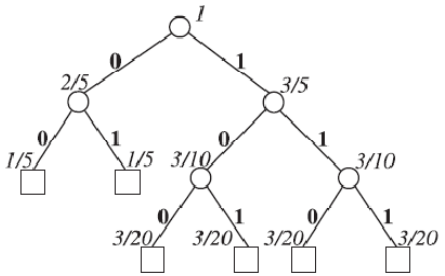
Przykład:

$$\hat{B}_6(3) = B_3(5) = 101, \qquad r = 2^{\lceil \log_2 6 \rceil} - 6 = 2$$

$$\hat{B}_{12}(3) = B_3(3) = 011, \qquad r = 2^{\lceil \log_2 12 \rceil} - 12 = 4$$

Efektywność kodu dwójkowego

Kod dwójkowy prawie stałej długości jest **optymalnym kodem symboli** dla zrównoważonego rozkładu prawdopodobieństw symboli danego źródła
(tj. *suma dwóch najmniejszych prawdopodobieństw jest większa od prawdopodobieństwa największego oraz alfabet jest uporządkowany zgodnie z nierosnącym prawdopodobieństwem kolejnych symboli*)



drzewo optymalne

Kod unarny

- Prosta postać kodu o <u>nieograniczonym alfabecie</u>:

$$U(i) = \underbrace{0\ldots01}_{i \text{ razy}}, \quad i = 0,1,\ldots \qquad \text{lub} \qquad \overline{U}(i) = \underbrace{1\ldots10}_{i \text{ razy}}$$

indeks symbolu w alfabecie $A_S=\{a_0,a_1,\ldots,a_i,\ldots\}$

- Długość słowa:

$L_i=i+1$, czyli jeśli mamy $p_i=1/2^{i+1}$ to $I(a_i)=\log_2 1/p_i=i+1$

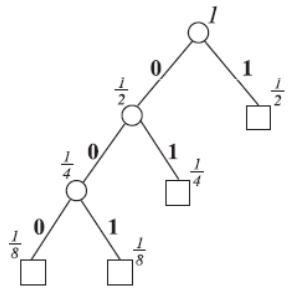
- Wobec tego: kod jest optymalny dla rozkładu prawdopodobieństw

$p_i=1/2\cdot 1/2^i$,

- Ogólniej rozkład geometryczny $p_i= (1-\rho)\cdot\rho^i$, gdzie $\rho=1/2$

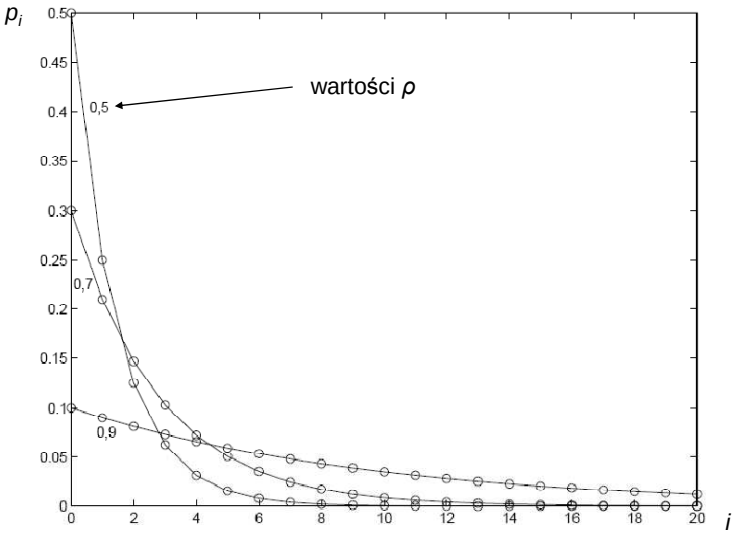
Optymalne drzewo unarne

- Jeśli $\rho<=1/2$ kod unarny jest kodem optymalnym, bo $\log_2 1/p_i >=1$



drzewo unarne

Jaki kod jest optymalny dla ρ>1/2



Kod Golomba

- Robi się użytek z kodu dwójkowego i unarnego
- Alfabet nieskończony, uporządkowany nierosnąco według prawdopodobieństw $A_S=\{a_0,a_1,\ldots,a_i\ldots\}$
- Podział alfabetu na podprzedziały (rząd *m>1* kodu)

$$A_S=\{\underbrace{a_0,\ldots,a_{m-1}}_{\text{przedział 0}},\underbrace{a_m,\ldots,a_{2m-1}}_{\text{przedział 1}},a_{2m},\ldots\}$$

- Kod $G_m(i)=U(\text{nr przedziału } i)\hat{B}_m(\text{odległość } i \text{ od początku przedziału})$, czyli

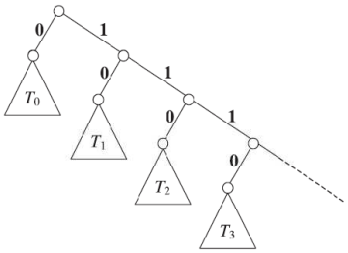
$$G_m = U(\lfloor i/m \rfloor)\hat{B}_m(i \bmod m)$$

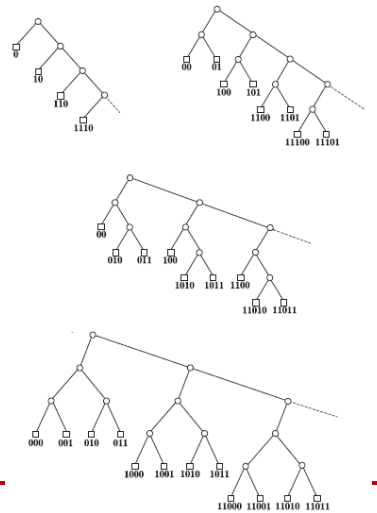
Słowa kodu Golomba

	Słowa kodu Golomba określonego rzędu						
i	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$	$m=6$	$m=7$
0	0	0|0	0 0	0|00	0|00	0|00	0|00
1	10	0|1	0 10	0|01	0|01	0|01	0|010
2	110	10|0	0 11	0|10	0|10	0|100	0|011
3	1110	10|1	10 0	0|11	0|110	0|101	0|100
4	11110	110|0	10 10	10|00	0|111	0|110	0|101
5	111110	110|1	10 11	10|01	10|00	0|111	0|110
6	1111110	1110|0	110 0	10|10	10|01	10|00	0|111
7	11111110	1110|1	110 10	10|11	10|10	10|01	10|00
8	111111110	11110|0	110 11	110|00	10|110	10|100	10|010
9	1111111110	11110|1	1110 0	110|01	10|111	10|101	10|011
10	11111111110	111110|0	1110 10	110|10	110|00	10|110	10|100
⋮	...	...	...	...	...	...	...

Cechy kodu Golomba

- Minimalna długość słowa: $\lfloor \log_2 m \rfloor + 1$
- Drzewo kodu Golomba





Efektywność kodu Golomba

- Interpretacja rzędu kodu: ρ^m=1/2 (wolniej narasta długość słów)
- Dobór *m*

$$m = \left\lceil \frac{\log(1+\rho)}{\log \rho^{-1}} \right\rceil$$

- Przykładowo dla ρ=0,9 wartość optymalnego *m* wynosi 7
- Możliwy jest adaptacyjny dobór rzędu kodu, np. w JPEG-LS

Kod Rice'a

- Wygodna implementacyjnie wersja kodu Golomba z ograniczeniem na $m=2^k$, czyli

$$R_k = G_{2^k}$$

- Tworzenie słowa: odcinamy *k* bitów i dodajemy unarnie zapisaną liczbę utworzoną z bitów pozostałych

przykład:

$R_3(12)$=01 100

$R_3(19)$=001 011

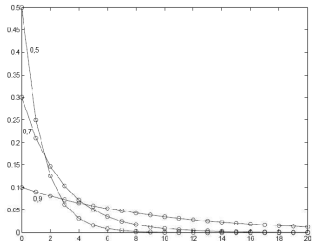
Słowa kodu Rice'a

	Słowa kodu Rice'a określonego rzędu				
i	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
0	1|0	1|00	1|000	1|0000	1|00000
1	1|1	1|01	1|001	1|0001	1|00001
2	01|0	1|10	1|010	1|0010	1|00010
3	01|1	1|11	1|011	1|0011	1|00011
4	001|0	01|00	1|100	1|0100	1|00100
5	001|1	01|01	1|101	1|0101	1|00101
6	0001|0	01|10	1|110	1|0110	1|00110
7	0001|1	01|11	1|111	1|0111	1|00111
8	00001|0	001|00	01|000	1|1000	1|01000
9	00001|1	001|01	01|001	1|1001	1|01001
⋮	...	...	...	...	...

Adaptacyjny kod Rice'a z JPEG-LS

- Dobór rzędu kodu przy określonym kontekście wystąpienia danej (symbolu)

wartość kodowanej danej to E



```
/* Zmienna A[0..364] zawiera sumę modułów błędów predykcji
   kontekstu Q; w N[0..364] liczone są przypadki wystąpień
   Q od inicjalizacji; A[Q] i N[Q] są aktualizowane zgodnie
   z aktualnym błędem predykcji E*/

A[Q] = A[Q] + abs(E); /* aktualizacja zmiennych */
N[Q] = N[Q] + 1;
...
for(k=0; (N[Q]<<k)<A[Q]; k++); /* wyznaczenie rzędu k */
```

Prediction error	Mapped value	Code *LG*(2,32)
0	0	1 00
−1	1	1 01
1	2	1 10
−2	3	1 11
2	4	01 00
−3	5	01 01
3	6	01 10
−4	7	01 11
4	8	001 00
−5	9	001 01
5	10	001 10
−6	11	001 11
6	12	0001 00
−7	13	0001 01
7	14	0001 10
−8	15	0001 11
8	16	00001 00
−9	17	00001 01
9	18	00001 10
13#4 −10	19	00001 11
10	20	000001 00
−11	21	000001 01
11	22	000001 10
−12	23	000001 11
12	24	0000001 00
...	...	...
50	100	00000000000000000000 00001 01100011

Tablica kodowania z JPEG-LS

Kod Rice'a z ograniczeniem

Testy

Ro_083_09390_069.tst	CR	Czas (sek.)
m = 4	1,672	2,463
m = 5	1,721	2,844
m = 6	1,736	2,935
m = 7	1,725	2,543
Adaptacyjny	**1,880**	2,644

Ro_087.tst	Stopień kompresji	Czas (sek.)
m = 4	1,829	2,273
m = 5	**1,843**	2,774
m = 6	1,835	2,814
Adaptacyjny	**1,843**	3,104

Ro_09571_09266_06800.tst	CR	Czas (sek.)
m = 8	1,481	3,675
m = 9	1,495	3,034
m = 10	1,503	3,015
m = 11	1,506	3,535
m = 12	1,505	3,465
m = 13	1,498	3,525
adaptacyjny	**1,630**	3,315

Aktualizacja rzędu	CR	Czas (sek.)
10	1,880	18,857
100	1,880	3,756
1000	1,879	2,334
10000	1,866	2,223
100000	1,763	2,243